TRATTATO
DELL'
EQUILIBRIO
E DEL
MOTO DE' CORPI

Composto per uso della

REGALE ACCADEMIA MILITARE

Dal Primario Professore della medesima

NICCOLÒ DI MARTINO

TOMO II.

IN NAPOLI MDCCLIII.

PRESSO GIOVANNI DI SIMONE.

Con permesso Regale.

LIBRO II.

DELL' EQUILIBRIO, E DEL MOTO DE' CORPI FLUIDI.

1. DOpo eſſerſi trattato nel libro precedente dell' equilibrio, e del moto de' corpi conſiſtenti, paſſeremo in queſt' altro a ragionare delle ſteſſe affezioni per rapporto ai corpi, che appellanſi fluidi. E per incominciare dalla loro indole, di già l'eſperienza ſteſſa c' inſegna, che i minimi elementi di queſti corpi cedono a qualſiſia forza motrice, e che cedendo facilmente ſi muovono tra eſſo loro. Onde, ſiccome conviene credere, che i ſuddetti elementi ſiano, o affatto diſtaccati gli uni dagli altri, o uniti inſieme con forza deboliſſima; così neppure ſarà egli lontano dal vero, che la loro figura ſia, o del tutto sferica, o almeno d' indole tale, che ad eſſa molto s' avvicini.

2. Stimano taluni, che gli ſteſſi minimi elementi, eziandio ne' fluidi quieſcenti, ſiano in una continua agitazione tra eſſo loro, a cui danno il nome di moto inteſtino; e che ſenza queſta loro agitazione continua non poſſa renderſi ragione della fluidità, che ſi ravviſa ne' corpi fluidi. Ma, oltre al non comprenderſi, donde ella poſſa derivare, e come altresì poſſa conſervarſi, neppure per ammetterla è baſtante argomento quello, che ricavano dallo ſcioglimento de' ſali immerſi ne' fluidi; poichè la ſteſſa loro immerſione pone in moto i minimi elementi di eſſi fluidi, i quali intromettendoſi ne' pori de' ſali, ſono cagione del loro ſcioglimento.

3. Se però per moto inteſtino voglia intenderſi, non già un moto attuale, e ſenſibile, ma un sforzo continuo, che facciano i minimi elementi del

 fluido

fluido per porsi in moto; non v' ha dubbio, che egli debba ammettersi in qualsisia fluido quiescente: e ciò per la ragione, che siccome gli strati inferiori del fluido, sostenendo il peso degli altri superiori, sono continuamente da questi premuti; così i minimi elementi degli stessi strati per mezzo della riferita pressione si sforzano muoversi per ogni lato; onde si è, che non possa un fluido esser quiescente, e privo di moto, se non sia cinto di argini, valevoli a resistere al riferito sforzo.

4. Or quantunque i corpi, che comunemente riguardansi come fluidi, non siano tutti della stessa indole; nientedimeno, conforme noi intendiamo ragionare di que' soli fluidi, che privi di ogni viscosità facilmente si agitano, e pongonsi in moto; così il solo divario da considerarsi in questi fluidi si è, che alcuni di essi sono egualmente densi da per tutto, i quali perciò chiamansi fluidi omogenei; altri al contrario non ritrovansi avere la stessa densità per tutta la loro massa, i quali in conseguenza appellansi fluidi eterogenei.

5. Ed in vero l'aere, che cinge la nostra terra, dee riporsi nella classe de' corpi fluidi, per essere tale la sua indole, che le parti di esso cedono ad ogni minima forza motrice, e cedendo si pongono in moto; ma poichè, con farsi egli a noi più vicino, vedesi aumentata la sua densità, dovrà il medesimo riguardarsi come fluido eterogeneo. All' incontro poi l'acque, e tutti i liquori a noi noti debbono aversi come fluidi omogenei: per la ragione, che in tutta la loro massa ritengono lo stesso grado di densità, non ostante, che gli strati inferiori di essi siano premuti dagli altri superiori, e sostengano il di loro peso.

6. Non possiamo intanto intendere, come l'aere, che ci circonda, con farsi a noi più vicino, facciasi più denso, se non se col dire, che gli strati suoi inferiori, con sostenere il peso degli altri superiori, si comprimono, e riduconsi a mole minore. Onde per lo contrario, ritenendo l'acqua, ed ogn' altro liquore la stessa densità da per tutto,

to, la loro tessitura dovrà essere tale, che gli renda incapaci di comprimersi: siccome in effetto si è veduto coll'esperienza, che l'acqua racchiusa in un globo d'oro, con comprimersi lo stesso globo, più tosto scappa per gli suoi strettissimi pori, che riducesi a mole minore.

7. Del rimanente, conforme questo divario, che si ravvisa tra gli uni, e gli altri fluidi, ci obbliga a ragionare di essi separatamente; così in primo luogo tratteremo de' fluidi omogenei, che di lor natura sono più semplici; ed indi de' fluidi eterogenei, la di cui indole è più composta. Ma, per non tralasciare cosa veruna intorno ai fluidi, che sia utile, e profittevole, conchiuderemo questo secondo libro coll'esame delle resistenze, che incontrano i corpi consistenti mossi ne' corpi fluidi.

CAPITOLO I.

Dell' equilibrio, e del moto de' fluidi omogenei.

8. NE' fluidi omogenei, che designeremo da quì innanzi, talvolta col nome di acque, e talvolta col nome di liquori, la prima cosa da considerarsi si è lo stato loro stagnante, o sia di quiete. E poichè la loro indole non permette, di potersi essi conciliare questo stato, se per ogni lato non siano cinti di argini, capaci di resistere al continuo sforzo, che fanno per porsi in moto; perciò nel porre a calcolo il loro stato di quiete, gli supporremo racchiusi dentro di un qualche vase, cosicchè il fondo ne sostenga il peso, ed i lati si oppongano allo sforzo loro continuo.

I.

Della suprema superficie di un liquore stagnante.

9. IN un liquore stagnante, e privo di moto la prima ricerca da farsi riguarda la situazione, in cui esser dee la di lui suprema superficie. E per

poco, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che ella debba disporsi in sito orizontale. In fatti, se la riferita superficie fosse inclinata all'orizonte, vi sarebbero in essa delle parti più elevate, e dell'altre più depresse. Onde, siccome le più elevate per ragion del loro peso, e della loro fluidità dovrebbero portarsi verso l'altre più depresse; così il liquore non sarebbe stagnante, e privo di moto, conforme si suppone.

10. Ma egli è facile di dimostrare il converso del riferito teorema: cioè, che se la suprema superficie di un liquore sia in sito orizontale, egli il liquore debba esser stagnante, e privo di moto. Imperocchè, attenta la situazione della sua suprema superficie, le eguali parti di essa per ragion del loro peso, e della loro fluidità sforzansi egualmente di cacciare dai loro luoghi le loro contigue. Onde, conforme gli sforzi, che esercitansi da dette parti, sono eguali, e contrarj; così le medesime saranno in equilibrio, ed in conseguenza prive di moto.

11. Per una ragion consimile neppure potranno muoversi le parti, che ritrovansi al di sotto di quella superficie. Concepiscasi perciò diviso il liquore in strati orizontali, che siano di un' altezza infinitamente piccola. Ed attenta la situazione, così di questi strati, come della suprema superficie, chiaro si è, che le eguali parti di ciascun strato siano egualmente premute dai filamenti di liquore, che insistendo su di esse a perpendicolo, giungono per sino a quella superficie. Onde, siccome le suddette parti sforzansi eziandio egualmente di cacciare dai loro luoghi le loro contigue, così esse ancora saranno in equilibrio, ed in conseguenza prive di moto.

12. Sembra intanto, che questa dimostrazione non possa aver luogo ne' liquori racchiusi in vasi acuminati. Imperocchè, attenta la figura di questi vasi, i filamenti di liquore, che insistono a perpendicolo sulle eguali parti di ciascun strato, non giungono tutti per sino alla suprema superficie, ma altri

altri di essi sono più alti, ed altri più bassi. Onde, siccome questi filamenti premono le eguali parti dello strato, su di cui insistono, a misura del loro peso, che corrisponde in proporzione alla loro altezza; così le pressioni, che soffrono le parti ad essi sottoposte, non saranno tutte tra loro eguali.

13. Ciò però non ostante, egli è facile di estendere la stessa dimostrazione eziandio ne' liquori racchiusi in vasi acuminati. Imperocchè, sebbene i filamenti più alti per ragion del loro peso esercitino pressione maggiore; nientedimeno i medesimi con questa maggior loro pressione sforzansi di portare in alto i filamenti più bassi, che premono meno. Onde, siccome all' elevazione di quest' altri filamenti resistono i lati del vase con forza eguale, e contraria; così gli stessi filamenti col loro peso, aumentato di quest' altra forza, premeranno egualmente, che gli altri filamenti più alti; e pertanto le pressioni, che soffrono le parti ad essi sottoposte, tuttavia saranno tra loro eguali.

14. Or siccome la suprema superficie di un liquore stagnante dee essere orizontale; così sarà ella tale, quantevolte tutte le sue parti sono in egual distanza dal centro della terra, ove si sforzano portarsi per mezzo del loro peso. Quindi la riferita superficie dovrà riguardarsi propriamente come porzione di una superficie sferica, che ha per centro il centro stesso della terra. E quantunque alla vista sembri ella esser piana, e priva di ogni convessità; nientedimeno ciò avviene, perchè la medesima è quasi una porzione infinitamente piccola dell' intera superficie sferica, a cui si rapporta.

15. Ma non sarebbe lo stesso, se la copia del liquore stagnante fosse così grande, che la sua suprema superficie avesse rapporto sensibile coll'intera superficie sferica, di cui è ella porzione; poichè in questo caso la convessità di essa sarebbe ancora sensibile: come infatti la convessità della suprema superficie dell' acque del mare ricavasi bastan-

temente da ciò, che i naviganti, conforme a poco a poco perdono di vista i luoghi, donde partono; così eziandio a poco a poco discuoprono i luoghi, verso i quali si portano.

16. Se adunque questa nostra terra fosse tutta coverta di acque, cosicchè il mare si estendesse da per tutto, come era senza dubbio nella sua prima origine; per queltanto è stato dimostrato, dovrebbe ella essere perfettamente sferica. Ma sebbene porzione di essa sia asciutta, ed in questa vegganfi delle ineguaglianze, cioè monti, valli, e pianure; pure tuttavolta l'intera massa terraquea dee aversi come sferica. Imperocchè, siccome la parte terrea, per servire di argine alla parte aquea, non può essere più bassa; così dal placido corso de' fiumi, che si scaricano finalmente nel mare, ricavasi, che neppure sia più alta; e per quanto alle sue ineguaglianze, queste svaniscono per rapporto all'intera superficie.

17. Dee essere intanto questa nostra terra di figura sferica, sempre quando tengasi per indubbitato, che ella sia priva di ogni moto. Ma se mai vogliasi supporre, che la medesima si aggiri intorno al suo asse; in tal caso la sua figura sarà quella di un sferoide allungato verso l' equatore, e depresso verso i poli. E ciò per la ragione, che siccome le sue parti colla riferita rivoluzione si sforzano allontanarsi dal centro del loro moto; così, essendo questo sforzo in ciascuna di esse proporzionale alla circonferenza del cerchio, per cui si porta, sarà egli maggiore nelle parti più vicine all' equatore, e minore nelle parti più lontane.

II.

Della pressione verticale di un liquore stagnante.

18. DEterminata la situazione, in cui esser dee la suprema superficie di un liquore stagnante, passeremo ora a considerare la pressione, che esercita lo stesso liquore per ragion del suo peso, così verso il fondo del vase, in cui sta racchiuso,

come

come verso i lati. E per incominciare dalla prima, che esercitasi verticalmente, di già si è dimostrato, che se concepiscasi il liquore diviso in strati orizontali di un'altezza infinitamente piccola, le eguali parti di ciascun strato debbano esser premute egualmente dai filamenti di liquore, che insistono sù di esse a perpendicolo.

19. Or questo stesso dee dirsi delle eguali parti, prese nel fondo del vase, in cui il liquore sta racchiuso. Imperocche, intendendosi per fondo del vase la parte sua più bassa, non v'ha dubbio, che egli sia premuto da un strato di liquore, eziandio orizontale. Onde, conforme sono eguali le pressioni, che soffrono le eguali parti di questo strato; così queste altresì premeranno egualmente le eguali parti del fondo, sù di cui si appoggiano; e pertanto ancora le eguali parti di esso fondo soffriranno pressioni eguali.

20. Prendasi ora una data porzione, sia in un strato di liquore, sia nel fondo del vase; ed egli è facile il dimostrare, che la pressione verticale, che ella soffre, sia proporzionale all'altezza, a cui elevasi il liquore sopra di essa. In fatti deriva la riferita pressione dal peso di que' filamenti di liquore, che insistendo a perpendicolo sulla data porzione, o terminansi effettivamente per fino alla suprema superficie, o debbonsi concepire terminati per fino a quella. Onde, siccome per essere questi filamenti di liquore dati di numero, ed egualmente densi da per tutto, il loro peso corrisponde in proporzione alla loro altezza; così eziandio la pressione, di cui si tratta, sarà proporzionale alla stessa altezza.

21. Se poi la porzione, che prendesi, sia in un strato di liquore, sia nel fondo del vase, non sia data; in tal caso, per definire la pressione verticale, che ella soffre, dovrà tenersi conto ancora della sua ampiezza. In effetto, non essendo data la porzione premuta, neppure sarà dato il numero de' filamenti di liquore, che col loro peso la premono. Onde, siccome il peso di tutti questi filamen-

ti

ti dee ripeterſi, non ſolo dalla loro altezza, ma eziandio dal loro numero, che corriſponde in proporzione all'ampiezza della porzione premuta; così, per definire la preſſione verticale, che ſoffre queſta porzione, biſognerà tener conto, e dell'altezza, a cui aſcende il liquore ſopra di eſſa, e della ſua ampiezza.

22. Se adunque abbianſi due vaſi ripieni di un' iſteſſo liquore, le preſſioni verticali, che ſoffrono i loro fondi, generalmente ſaranno in ragion compoſta dell' altezze, a cui aſcende il liquore ſopra di eſſi, e dell' ampiezze degli ſteſſi fondi. Onde, ſiccome debbono eſſere nella ſemplice ragione dell' altezze, ſe ſiano eguali i fondi; e nella ſemplice ragione de' fondi, ſe ſiano eguali le altezze: così ſaranno tra di eſſe eguali, quantevolte o ſono eguali tanto i fondi, quanto le altezze, e pure il fondo, e l'altezza di uno di eſſi ſono reciprocamente proporzionali col fondo, e coll'altezza dell'altro.

23. Niente però vieta, che i liquori contenuti nei due vaſi abbiano denſità diverſe; ed in queſto caſo, volendo paragonare la preſſione verticale, che eſercita uno di eſſi, colla preſſione verticale, che eſercita l'altro, dovremo tener conto parimente delle diverſe loro denſità: per la ragione, che i peſi di due loro filamenti debbono ripeterſi, non ſolo dalle loro altezze, ma eziandio dalle loro denſità. Ed eſſendo così, le preſſioni verticali, che ſoffrono i fondi dei due vaſi, ſaranno generalmente in ragion compoſta dell'altezze, a cui aſcendono i due liquori ſopra di eſſi, delle denſità, che ritrovanſi avere detti liquori, e dell'ampiezze degli ſteſſi fondi.

24. Da queſto general teorema intanto poſſono dedurſi come corollarj molti altri ſpeciali. Ed in fatti per mezzo di eſſo ſiccome vedeſi primieramente, che le riferite preſſioni debbano eſſere in ragion compoſta delle altezze, e delle denſità, eſſendo eguali i fondi; dell'altezze, e de'fondi, eſſendo eguali le denſità; ed in fine delle denſità, e de'fondi, eſſendo eguali le altezze: così vedeſi inoltre, che

le stesse pressioni debbano essere nella semplice ragione dell'altezze, essendo eguali, tanto le densità, quanto i fondi; nella semplice ragione delle densità, essendo eguali così i fondi, come le altezze; ed infine nella semplice ragione de' fondi, essendo eguali, tanto le altezze, quanto le densità.

25. Ma oltre a questi teoremi speciali, possiamo dedurne ancora altri intorno all' eguaglianza delle pressioni verticali, che soffrono i fondi dei due vasi: siccome in effetto le riferite pressioni debbono essere eguali, primieramente se insieme coi fondi siano eguali così le altezze, come le densità; in secondo luogo, se essendo eguali i fondi, le altezze siano nella reciproca ragione delle densità; in terzo luogo, se essendo eguali le densità, le altezze siano nella reciproca ragione de' fondi; in quarto luogo, se essendo eguali le altezze, la ragione delle densità sia reciproca di quella de' fondi; ed infine, se i fondi siano in ragion composta della reciproca dell' altezze, e della reciproca delle densità.

26. Per lo schiarimento intanto del riferito teorema generale, giova riflettere, che qualunque sia la figura del vase, in cui il liquore sta racchiuso, il suo fondo dee considerarsi come premuto dal peso di tanto liquore, quanto ne contiene il prisma, che avendo per base lo stesso fondo, elevasi col liquore racchiuso nel vase alla stessa altezza. Onde, siccome dee giudicarsi della pressione verticale, che soffre il fondo, per mezzo di questo peso; così s' intenderà facilmente, che ella debba ripetersi da tre fonti, cioè dall' altezza, a cui elevasi il liquore su 'l fondo del vase, dalla densità, che risiede nel liquore, e dall' ampiezza dello stesso fondo.

27. Egli è vero, che nel vase per ragion della sua figura non sempre si contiene tanto liquore, quanto diciamo esser quello, dal di cui peso dee ripetersi la pressione verticale, che soffre il fondo del vase. Ma si vuol riflettere, che conforme il di più di liquore esistente in un vase, che si slarga per rapporto al suo fondo, vien sostenuto dai

lati

lati del vafe, e non già dal fondo; così al contrario queltanto manca di liquore in un vafe acuminato, vien fupplito dalla refiftenza, che i lati fteffi del vafe oppongono al continuo sforzo, con cui i filamenti più baffi cercano di elevarfi fino alla fuprema fuperficie. E quindi fi è, che quefti due vafi pofti in una bilancia tutta via ci additano i loro pefi veri, e reali.

III.

Della preffione laterale di un liquore ftagnante.

28. Esamineremo ora l'altra preffione, che efercita il liquore verfo i lati del vafe, in cui fta racchiufo, ed a cui perciò fi è dato il nome di preffione laterale. Ed in primo luogo non è egli da porfi in dubbio, che fi eferciti effettivamente dal liquore quelt' altra preffione. Imperocchè, fe in uno de' lati del vafe facciafi un forame, l'efperienza fteffa c'infegna, che il liquore fubito fcappa fuori per la fua apertura. Onde, per render ragione di quefto fuo muovimento, la di cui direzzione è laterale, per neceffità dee dirfi, che il liquore racchiufo nel vafe preme, non folo verticalmente il fuo fondo, ma eziandio lateralmente i fuoi lati.

29. Intanto nel liquore non ritrovafi altra forza, fe non fe quella, che deriva dal fuo pefo, e che di fua natura agifce fempre con direzzione verticale. Onde, febbene intendafi, come dal pefo del liquore ne rifulti la preffione verticale; nientedimeno non sà comprenderfi, come dall'ifteffo pefo poffa nafcere l'altra preffione laterale. Ed abbenchè, per derivare queft' altra preffione dal pefo del liquore, non fia da porfi in dubbio, che debba ricorrerfi all'indole fteffa del liquore; pure tuttavolta, per non efferci quefta baftantemente nota, fi dura fatica ad intendere, qual parte ella v'abbia, e come vi conduca.

30. Quindi, per avanzare sù di quefto punto congettura, che fi accofti al vero, bafterà fupporre, che gli immediati elementi di qualfifia liquo-

re,

re, sebbene non siano capaci di comprimersi, e di ridursi a mole minore; sono tuttavolta così cedevoli ad ogni minima forza motrice, che ritenendo la stessa mole, di leggieri possono cambiare la loro figura: dimodocche supponendoli, come è probabile, di figura sferica, potranno facilmente restringersi per un lato, e dilatarsi per un'altro: conforme veggiamo avvenire nelle piccole goccie d'acqua pendole, che per mezzo del proprio loro peso da sferiche, che prima erano, cambiansi in sferoidali.

31. Supposta questa tessitura negli immediati elementi di qualsisia liquore, niente ora sarà più facile, quanto di render ragione della pressione laterale, di cui si tratta. Concepiscasi perciò diviso il liquore in strati orizontali, che siano di un' altezza infinitamente piccola. E per le pressioni verticali, che soffrono gli immediati elementi di un' istesso strato, ciascun di essi si sforzerà di distendersi lateralmente, e di cacciare dai loro luoghi gli altri ad esso contingui. Onde, siccome con questi sforzi, che sono eguali, e contrarj, si premeranno tra esso loro ancora di lato; così i contigui ai lati del vase eserciteranno verso questi lati eziandio pressioni consimili.

32. Secondo la riferita supposizione adunque dee ripetersi la pressione laterale, che esercita il liquore verso i lati del vase, da quel continuo sforzo, che gli immediati suoi elementi fanno per distendersi lateralmente. E poichè deriva questo sforzo dalla pressione verticale, che soffrono gli stessi elementi; possiamo quindi dedurne due conseguenze. La prima si è, che in un medesimo strato le due pressioni, cioè la laterale, e la verticale, debbano farsi con forze eguali. L'altra si è, che siccome la forza, da cui deriva la pressione verticale, è proporzionale in ogni strato all'altezza, a cui elevasi il liquore sopra di esso; così alla stessa altezza debba corrispondere ancora in proporzione la forza, per mezzo di cui esercitasi la pressione laterale.

33. Es-

33. Essendo così, se il vase sia formato in modo, che i suoi lati insistano a perpendicolo su'l di lui fondo, potrà dimostrarsi per rapporto ad esso il seguente teorema: cioè, che l'intera pressione laterale, che soffrono i suoi lati, sia all'intera pressione verticale, che soffre il suo fondo, come stà la superficie dimezzata di essi lati alla superficie intera di esso fondo. Concepiscasi perciò divisa la superficie de' lati in piccole corone per infiniti piani, che siano non solo paralleli al fondo, ma eziandio egualmente distanti l'uno dall'altro; ed attenta la figura del vase, chiaro si è, che queste piccole corone siano tutte tra loro eguali.

34. Or siccome le pressioni laterali, che soffrono le riferite piccole corone, si hanno con moltiplicare le corone stesse per le altezze, a cui ascende il liquore sopra di esse; così, per esser quest' altezze come i numeri naturali, si avrà la somma delle stesse pressioni, con moltiplicare la somma delle corone, o sia la superficie de' lati per la metà della massima altezza. Ma, per avere l'intera pressione verticale, che soffre il fondo, dee moltiplicarsi la sua superficie per tutta la massima altezza. Dunque l'intera pressione laterale, che soffrono i lati del vase, sarà all'intera pressione verticale, che soffre il di lui fondo, come la superficie dimezzata di essi lati alla superficie intera di esso fondo.

35. Da questo general teorema intanto possiamo dedurne come corollarj tre altri speciali. Il primo si è, che se il vase, di cui si tratta, abbia la figura di cubo, la prima delle due pressioni debba essere alla seconda in ragion dupla. L'altra si è, che se lo stesso vase abbia per suo fondo una figura regolare qualsivoglia, le due pressioni debbano essere tra di esse, come l'altezza del vase al raggio del cerchio inscritto dentro del fondo. Ed il terzo si è, che se il medesimo vase abbia per suo fondo un cerchio, cosicchè la sua figura sia cilindrica, le stesse due pressioni debbano essere tra esso loro, come l'altezza del vase al raggio del

del fondo suo circolare.

IV.

Dell' equilibrio de' liquori ne' vasi comunicanti.

36. Conforme due vasi diconsi essere comunicanti, quantevolte la cavità dell'uno comunica colla cavità dell'altro per mezzo di un canale aderente ai loro fondi; così per questa stessa loro comunicazione niente vieta di riguardarli come un sol vase, terminato lateralmente in modo, che abbia due diversi orificj. Onde, facendo uso della stessa dimostrazione rapportata di sopra, s'intenderà facilmente, che non possa un liquore, racchiuso dentro di essi, esser stagnante, e privo di moto, se non si elevi in ambidue alla stessa altezza, e terminisi in conseguenza ad una medesima superficie orizontale.

37. Ed in vero di già si è fatto vedere, che in ogni liquore, così la pressione verticale, come la laterale esercitasi con forza proporzionale all'altezza, a cui ascende il liquore riguardo al luogo, ove ella si esercita. Adunque, sempre quando il liquore elevasi nei due vasi alla stessa altezza, ciascuna di quelle sue parti, che ritrovansi nel canale di comunicazione, sarà premuta lateralmente con forze eguali, e contrarie. Onde, siccome queste parti debbono rimanere ferme, ed immobili; così neppure potranno muoversi l'altre, che ritrovansi nei due vasi; e per tanto tutto il liquore dovrà essere in equilibrio.

38. Sembra intanto, che ciò non debba aver luogo ne' vasi comunicanti, che sono di diversa ampiezza. Imperocche, se intendasi diviso in filamenti verticali, così il liquore dell'uno, come il liquore dell'altro; sarà il numero di questi filamenti maggiore nel vase più ampio, e minore nel vase più stretto. Onde, sebbene per l'eguali loro altezze ciascuno di essi eserciti la stessa pressione; nientedimeno la pressione totale, che corrisponde in proporzione al loro numero, sarà maggiore

nel

nel primo vase, e minore nel secondo; e pertanto, dovendo prevalere la pressione maggiore, bisognerà, che il liquore nel vase più stretto si elevi ad altezza maggiore, per potersi avere l'equilibrio.

39. Si vuol però riflettere, che sussisterebbe una tal difficoltà, se le porzioni di liquore contenute nei due vasi agissero tra esso loro con tutte le pressioni, che esercitansi dai loro filamenti verticali. Ma siccome molti di questi filamenti non distendonsi a dirittura per tutta la larghezza del canale di comunicazione; così non sarà egli vero, che ogni filamento mantengasi elevato nel suo vase per la pressione contraria, che esercita un filamento consimile dell'altro vase. Ed in fatti que' filamenti, che distesi a dirittura terminansi nelle parti laterali, o del vase, a cui appartengono, o pure del canale, conforme esercitano le loro pressioni contro queste parti, così mantengonsi elevati per le resistenze, che le stesse parti gli oppongono.

40. Per quanto stretto adunque che sia uno de' due vasi comunicanti, sempre il liquore dee elevarsi in ambidue alla stessa altezza, affinchè la porzione contenuta in uno di essi possa equilibrarsi colla porzione contenuta nell'altra. Onde, se il vase più stretto abbia altezza maggiore, e l'orificio dell' altro più basso chiudasi con un qualche coverchio; la maggiore altezza della porzione di liquore contenuta nel vase più stretto, sarà, che il riferito coverchio sia spinto in alto dall'altra porzione di liquore, che ritrovasi sotto di esso, con forza equivalente al peso del liquore contenuto in un prisma, che ha per base l'orificio del vase, e per altezza la differenza delle due, a cui elevasi il liquore nei due vasi.

41. Si vuol quì notare, che eziandio nel liquore racchiuso in un sol vase possono considerarsi vasi comunicanti. Concepiscasi perciò diviso il liquore in filamenti verticali; e per rapporto a ciascuno di essi faranno le veci di vase i filamenti contigui, che lo sostengono. Quindi, consideran-
done

done due uniti insieme per mezzo di quel filamento orizzontale, che framezzandosi tra i loro estremi similmente è sostenuto dai suoi contigui; agiranno questi filamenti tra esso loro, come agiscono le porzioni di liquore contenute in vasi comunicanti. Onde, per potersi equilibrare l'uno coll'altro, dovranno essere eguali l'altezze, a cui gli stessi filamenti nel comune loro vase s'innalzano.

42. Immergasi ora in due vasi communicanti un liquore, che abbia molto peso. E siccome egli sarà in equilibrio, quantevolte elevasi in ambidue alla stessa altezza; così, se in uno di essi aggiungasi altro liquore meno pesante, non v'ha dubbio, che il primo per la pressione, che esercita l'altro liquore aggiunto, debba abbassarsi in questo vase, ed elevarsi a maggior'altezza nell'altro. Ma non perciò dobbiamo darci a credere, che per conservarsi l'equilibrio coll'aggiunta dell'altro liquore, l'abbassamento, e l'elevazione del primo debbano farsi in modo, che i totali liquori contenuti nei due vasi ascendano alla stessa altezza; poichè, sebbene uno di essi sia egualmente denso da per tutto, nientedimeno le due porzioni dell' altro sono di diversa densità.

43. Per poco intanto, che voglia riflettersi, s'intenderà facilmente, che per conservarsi l'equilibrio coll'aggiunta dell'altro liquore, l'abbassamento, e l'elevazione del primo debbano farsi in modo, che la differenza dell' altezze, a cui egli ascende nei due vasi, sia all'altezza del liquore aggiunto nella reciproca ragione delle densità di essi liquori. In fatti la porzione del primo liquore, che ritrovasi abbassata in uno dei due vasi, non può equilibrarsi, se non se con una porzione egualmente alta dello stesso primo liquore contenuto nell'altro vase. Dunque, dovendosi equilibrare il liquore aggiunto colla porzione rimanente del primo, per necessità le altezze di essi dovranno essere nella reciproca ragione delle loro densità.

V.

Degli effetti, che possono aversi colle pressioni de' liquori.

44. PRima di passare più oltre ad altre ricerche, giova qui fare alcune riflessioni sugli effetti, che possono aversi colle pressioni de' liquori. Riempiasi perciò un vase di un qualche liquore; e per quettanto è stato dimostrato, così le eguali parti del suo fondo, come le eguali parti de' suoi lati sono premute a proporzione dell'altezza, a cui ascende il liquore sopra di esse. Or niente vietà, di aumentare queste loro pressioni in qualunque ragione si voglia coll'aggiunta di pochissima altra quantità dello stesso liquore: bastando chiudere l'orificio del vase con un qualche coverchio, che sia di giusta resistenza, ed introdurre dentro del vase per un piccolo forame fatto in questo coverchio un tubo di egual diametro, che sia aperto dall'uno, e dall'altro lato.

45. In fatti, siccome questo tubo dee riguardarsi come parte del vase, così non v'ha dubbio, che riempiendosi egli dello stesso liquore, debbano aumentarsi le pressioni, che soffrono le eguali parti del fondo, e de' lati del vase, a misura della sua altezza. Onde può darsi al tubo altezza tale, che il fondo, ed i lati del vase non siano capaci di resistere alle pressioni, che soffrono le loro parti. Conforme poi il liquore contenuto nel vase fa continuo sforzo per elevarsi alla stessa altezza con quella del tubo; così egli con questo sforzo suo continuo spingerà in alto il coverchio, con cui si è chiuso il vase. Onde, con aumentarsi l'altezza del tubo, può essere questa spinta di tanta attività, che neppure il coverchio sia capace di sostenerla.

46. Per giudicare intanto con maggior distinzione dell'aumento, che ricevono tutte queste pressioni, con aumentarsi l'altezza del tubo, giova riflettere, che secondo è stato dimostrato, sic-

come

come la pressione, che soffre il fondo del vase, dee ripetersi dal peso di tanto liquore, quanto ne contiene un prisma, che ha per vase lo stesso fondo, e per altezza le due del vase, e del tubo unite insieme; così la spinta, che riceve il coverchio dal liquore contenuto nel vase, dee ascriversi a tanta forza, quanto è il peso del liquore contenuto in un' altro prisma, che ha per base l'orificio del vase, e per altezza quella del solo tubo.

47. Supposto poi, che i lati del vase siano perpendicolari al di lui fondo, può dimostrarsi facilmente, che la totale pressione, che essi soffrono, debba dedursi dal peso di tanto liquore, quanto ne contiene un prisma, che ha per base la superficie degli stessi lati, e per altezza quella del tubo aumentata della metà dell'altra del vase. Concepiscasi perciò divisa la riferita superficie in piccole corone per infiniti piani, che siano non solo paralleli al fondo del vase, ma eziandio egualmente distanti l'uno dall'altro; ed attenta la figura del vase, chiaro si è, che queste piccole corone siano tutte eguali tra loro.

48. Or siccome le quantità di liquore, che premono col loro peso le riferite piccole corone, si hanno con moltiplicare le corone stesse per l'altezze corrispondenti, prese dalla sommità del tubo; così, per essere queste altezze in progressione arimmetica, si avrà la copia di liquore, che col suo peso preme le stesse corone unite insieme, con moltiplicare la loro somma, o sia la superficie de' lati del vase per la somma dimezzata della minima, e della massima altezza. Ma la minima altezza è quella del solo tubo, e la massima sono le due del tubo, e del vase unite insieme. Dunque, avendosi la copia di liquore, che col suo peso preme i lati del vase, con moltiplicare la superficie di essi lati per l'altezza del tubo aumentata della metà di quella del vase, sarà ella tanta per l'appunto, quanta ne contiene il prisma enunciato.

49. In un altra maniera ancora può farsi uso del riferito tubo, così per aumentare le pressioni,

che soffrono il fondo, ed i lati del vase, come per spingere in alto il coverchio, con cui si è chiuso il suo orificio: cioè con situarlo in modo, che la sua cavità comunichi con quella del vase per mezzo di un canale aderente ai loro fondi. Ma in questa situazione, siccome egli, ed il vase debbono riguardarsi come due vasi communicanti; così, per definire le quantità di liquore, che col loro peso premono il fondo, il coverchio, ed i lati del vase, dovrà tenersi conto, non già dell'intera altezza del tubo, ma di quella solamente, per cui la sua sommità ritrovasi elevata sull'orificio del vase.

50. Con questi principj può rendersi ora ragione degli effetti meravigliosi, che veggonsi ben spesso derivare dall'acque piovane, che per canali interni insinuansi in un qualche monte. Imperocche, siccome può avvenire talvolta, che queste acque non passino più oltre, ma ristagnino in una qualche cavità, che ritrovasi nello stesso monte; così questa cavità, in cui l'acque si arrestano, sarà il vase, di cui si è ragionato; ed il canale, per cui si sono insinuate, sarà il tubo, che comunica col vase. Onde, conforme può avvenire ancora, che per la molta altezza del canale facciansi ne' pareti della stessa cavità pressioni tali, che alcuni di essi non siano capaci di sostenerle; così, dovendo questi cedere, si distaccheranno dagli altri più resistenti, e per le loro aperture avranno l'acque ristagnanti il loro scolo.

51. Con quest' istessi principj può rendersi ancora ragione di quell' urto laterale, che fanno continuamente i terrapieni, e per mezzo di cui rovesciar si dovrebbero, se non fossero sostenuti da muri grossissimi fatti a scarpa. In fatti, per quanto siano compatti, e sodi i terrapieni, sempre vi saranno in essi bastanti meati, per cui come per tanti tubi insinuansi dentro de' medesimi l'acque piovane. Onde, siccome questi tubi per le pressioni, che incominciano a soffrire, pian piano si slargano, e si fanno più profondi; così con aumen-

men-

mentarsi la loro larghezza; e la loro profondità, si aumenteranno altresì le pressioni, che essi soffrono; e per tanto da queste pressioni così aumentate dovrà ripetersi l'urto laterale, che fanno continuamente i riferiti terrapieni.

VI.

Dell'equilibrio de' liquori coi solidi immersi dentro di essi.

52. I Liquori esercitano pressioni, non solo verso i fondi, ed i lati de' vasi, in cui si racchiudono; ma eziandio verso i corpi solidi, e consistenti, che in essi s'immergono. Quindi, per trattare altresì di quest'altre pressioni; noteremo primieramente, che siccome il peso di ciascun corpo corrisponde in proporzione alla sua massa, o sia quantità di materia; così a simiglianza di questa dee egli ripetersi, non solo dalla mole di esso corpo, ma eziandio dalla sua densità; onde si è, che sotto eguali moli possono due corpi per le diverse loro densità essere eziandio di diverso peso.

53. Or conforme le diverse specie de' corpi, che abbiamo, per lo più differiscono tra esso loro per le diverse loro densità; così da ciò è derivato, che a ciascuna di esse ascrivasi la sua specifica gravità, che corrisponde in proporzione al grado della sua densità. Quindi le specifiche gravità di due corpi, a simiglianza delle loro densità, saranno in ragion composta della diretta de' loro pesi, e della reciproca delle loro moli. Onde, siccome le stesse gravità specifiche debbono essere nella sola ragion diretta de' pesi, essendo eguali le moli; e nella sola ragion reciproca delle moli, essendo eguali i pesi: così le medesime saranno tra loro eguali, quante volte o sono eguali, tanto i pesi, quanto le moli; o pure i pesi, e le moli sono tra essoloro nella stessa ragione.

54. Ciò avvertito, per venire ora alle pressioni,

di cui intendiamo ragionare, immergaſi un corpo ſolido qualſiſia dentro un qualche liquore, ed immaginiamolo ivi ſoſpeſo almeno per piccoliſſimo tratto di tempo. Siccome adunque la porzione di liquore, che giace ſotto di eſſo, è meno alta dell'altre porzioni contigue; così la preſſione, che ella eſercita, ſarà minore altresì delle preſſioni, che eſercitanſi dall'altre porzioni. Onde, conforme la medeſima porzione, per queſte preſſioni maggiori, fa sforzo per elevarſi alla ſteſſa altezza dell' altre; così non è egli da porſi in dubbio, che il corpo ſia ſpinto da eſſa in alto con tanta forza, quanto è il peſo del liquore, che le manca per giungere a quella ſteſſa altezza.

55. A queſta ſpinta intanto reſiſte il corpo col ſuo proprio peſo; onde, attento il conflitto, che ſi paſſa tra il peſo del corpo, e la forza equivalente al peſo del liquore mancante, poſſono riceverſi come aſſiomi i tre ſeguenti teoremi. I, che ſe il peſo del corpo ſia eguale al peſo del liquore mancante, debba il corpo effettivamente reſtar ſoſpeſo nel liquore, in cui ſi è immerſo. II, che che ſe il peſo del corpo ſia minore del peſo del liquore mancante, debba il corpo portarſi in alto con forza equivalente alla differenza dei due peſi. E III finalmente, che ſe il peſo del corpo ſia maggiore del peſo del liquore mancante, debba il corpo portarſi in giù eziandio con tanta forza, per quanto gli ſteſſi due peſi differiſcono tra eſſo loro.

56. Con queſti principj facilmente potrà definirſi quel tanto deſ avvenire ad un corpo, che laſciato in libertà ſulla ſuprema ſuperficie di un liquore, immergeſi dentro di eſſo col ſuo proprio peſo. Ed infatti, ſe il corpo, ed il liquore abbiano la ſteſſa ſpecifica gravità, dovrà il corpo immergerſi interamente dentro del liquore. Ma, ſe la ſpecifica gravità del corpo ſia minore di quella del liquore, dovrà immergerſi del corpo tanta porzione, quanta è quella del liquore, che ha lo ſteſſo peſo col corpo intero. Ed in fine, ſe la gravità

ſpeci.

ſpecifica del corpo ſia maggiore di quella del liquore, non ſolo il corpo dovrà immergerſi interamente dentro del liquore, ma non potrà egli arreſtarſi, ſe non giunga al fondo del vaſe, in cui il liquore ſi racchiude.

57 Conforme poi ogni corpo può tenerſi ſoſpeſo dentro di un liquore almeno per mezzo di un filo; così tenendolo ſoſpeſo in queſta guiſa, lo ritroveremo diminuito di tanto peſo, quanto è quello del liquore, che ha la ſteſſa mole coll'immerſa porzione del corpo. Avviene intanto queſta diminuzione, non perchè il corpo perda effettivamente il riferito peſo, ſiccome taluni ſi danno a credere; ma perchè lo impiega in reſiſtere alla continua ſpinta, che riceve dal liquore, che giace ſotto di eſſo, e da cui in conſegnenza è ſoſtenuto il peſo, che ſembra perdere il corpo: come infatti, facendo uſo della bilancia, ritroveremo nel vaſe, non ſolo il peſo di tutto il liquore, ma quello altresì, di cui ſi minora il corpo nel tenerſi ſoſpeſo dentro di eſſo.

58. Se il filo, per mezzo di cui ſoſpendeſi il corpo dentro del liquore, ſi attacchi ad una parte ſuperiore del vaſe; non v'ha dubbio, che in queſto caſo debba ritrovarſi nel vaſe colla bilancia, così il peſo di tutto il liquore, come il peſo di tutto il corpo. Reca intanto meraviglia, che colla ſteſſa bilancia veggaſi diminuito il peſo del vaſe, quantevolte reciſo il filo portaſi il corpo col peſo ſuo rimanente verſo il fondo dello ſteſſo vaſe. Ma ne intenderemo ſubito la ragione, ſe rifletter vogliamo, che non poſſa il corpo portarſi verſo il fondo del vaſe, ſe non ſpinga in alto una egual porzione di liquore. Imperocche, ſiccome queſta porzione, con portarſi in alto, ceſſa di gravitare sù di quel fondo; così il peſo dello ſteſſo vaſe per neceſſità de vederſi diminuito nel caſo, di cui ſi tratta. ve

59. Del rimanente, ſiccome le diverſe immerſioni, che ſoffrono i corpi ne' liquori, debbono ripeterſi dalle loro diverſe gravità ſpecifiche; così

per giudicare di queſte, come ſi dee, biſogna tener conto delle figure di eſſi corpi, le quali poſſono talvolta coll' aggiunta di altra materia aumentare la loro mole, e diminuire la loro gravità ſpecifica. In fatti, ſe di un pezzo di rame facciaſi un vaſe concavo, queſta concavità aggiugne al rame un'egual porzione di aere; e quindi ſi è, che minorandoſi la di lui gravità ſpecifica, galleggi egli nell'acqua a guiſa di ogn'altro corpo meno grave di queſto liquore. Nè per altra ragione avviene ancora, che achi ſottiliſſimi, poſti ſull' acqua con delicatezza, mantengonſi talvolta in quella ſoſpeſi, ſe non perchè, attaccandoſi ad eſſi particelle aeree, coll'aggiunta di queſte aumentaſi la loro mole.

VII.

Conſeguenze per gli corpi, la di cui ſpecifica gravità è minore di quella de' liquori.

60. CON eſaminare le preſſioni, che ſoffrono i corpi immerſi ne' liquori, di già ſi è fatto vedere, che ſe la ſpecifica gravità del corpo ſia minore di quella del liquore, debba immergerſi di eſſo tanta porzione, quanta è quella del liquore, che ha lo ſteſſo peſo col corpo intero. Or ſiccome da queſto teorema poſſono dedurſi varie conſeguenze per gli corpi, che ſono di queſta indole; così giova riferirle brevemente, per eſſere di ſommo uſo, ſi per inveſtigare le ragioni, in cui ſono le gravità ſpecifiche tanto de' liquori, quanto de' corpi; come ancora per definire, così il peſo de' liquori contenuti in vaſi di data capacità, come la capacità de' vaſi, in cui contengonſi liquori di peſo conoſciuto.

61. La prima conſeguenza adunque ſi è, che eſſendo la gravità ſpecifica del corpo minore di quella del liquore; la prima di eſſa debba eſſere alla ſeconda, come la mole della porzione immerſa nel liquore alla mole del corpo intero,

In

In fatti queste due moli sono tra essoloro, come il peso della porzione immersa al peso del corpo intero. Onde, essendo il peso del corpo intero eguale al peso del liquore, che ha la stessa mole colla porzione immersa; le stesse due moli saranno ancora tra di esse, come il peso della porzione immersa al peso di una egual mole di liquore. Ma a questi pesi corrispondono in proporzione le specifiche gravità del corpo, e del liquore. Dunque la specifica gravità del corpo sarà alla specifica gravità del liquore, come la mole della porzione immersa alla mole del corpo intero.

62. La seconda conseguenza si è, che se un corpo abbia minor specifica gravità, tanto per rapporto ad un liquore, quanto per rapporto ad un'altro; le gravità specifiche di questi due liquori debbano essere nella reciproca ragione delle moli, che ritrovansi avere le due porzioni del corpo, che in essi s'immergono. In effetto, se dei due liquori prendansi porzioni, che siano della stessa mole colle porzioni del corpo immerse dentro di essi; avranno le medesime lo stesso peso col corpo intero. Onde, siccome le gravità specifiche dei due liquori debbono essere nella reciproca ragione delle moli di queste due loro porzioni; così le stesse gravità specifiche saranno altresì nella reciproca ragione delle moli, che ritrovansi avere le due porzioni del corpo, che immergonsi negli stessi liquori.

63. La terza conseguenza si è, che se due corpi di egual mole immerganſi in un liquore, per rapporto a cui ciascuno di essi abbia minor specifica gravità; queste loro gravità specifiche debbano essere nella diretta ragione delle moli, che ritrovansi avere le due porzioni immerse degli stessi corpi. In fatti per la prima conseguenza la gravità specifica di ciascuno dei due corpi sta alla gravità specifica del liquore, come la mole della porzione immersa alla mole del corpo intero. Ma si vuole, che i due corpi siano di egual mole. Dunque la specifica gravità di uno dei due corpi

sarà

farà alla specifica gravità dell'altro corpo, come la mole della porzione immersa del primo alla mole della porzione immersa del secondo.

64. La quarta, ed ultima conseguenza si è, che essendo la gravità specifica del corpo minore di quella del liquore contenuto in un vase; debba essere, come la mole della porzione immersa alla capacità del vase, così il peso di tutto il corpo al peso di tutto il liquore. Prendasi perciò una porzione di liquore, che sia di egual mole coll'immersa porzione del corpo. Ed essendo il liquore egualmente denso da pertutto, sarà il peso della porzione presa al peso di tutto il liquore, come la mole della stessa porzione alla mole di tutto il liquore. Ma, siccome di queste due moli la prima uguaglia la mole dell'immersa porzione del corpo, e la seconda equivale alla capacità del vase; così il peso della riferita porzione di liquore è lo stesso col peso di tutto il corpo. Dunque sarà ancora, come la mole dell'immersa porzione del corpo alla capacità del vase, così il peso di tutto il corpo al peso di tutto il liquore.

65. Or per mezzo delle prime tre conseguenze possono determinarsi le ragioni, in cui sono le specifiche gravità, tanto de' liquori, quanto de' corpi, che in essi galleggiano. In fatti, se immergasi uno di questi corpi in un qualche liquore, e determinisi così la mole della porzione immersa, come la mole di tutto il corpo; colla loro ragione avremo quella, che serbano tra esso loro le specifiche gravità del corpo, e del liquore. Se poi in due liquori diversi immergasi un'istesso corpo, e si determinino le moli delle porzioni immerse; la reciproca loro ragione ci darà quella, in cui sono le specifiche gravità dei due liquori. Ed infine, se due corpi di egual mole immerganfi in un'istesso liquore, e si determinino le moli delle porzioni immerse; colla loro ragione resterà determinata l'altra delle specifiche gravità degli stessi corpi.

66. Con far uso poscia della quarta conseguen-

za,

za, potrà determinarsi, così il peso di tutto il liquore, che si racchiude in un vase di data capacità, come la capacità del vase, in cui stà racchiuso un liquore di peso conosciuto. Immergasi perciò nel liquore un corpo, di cui sia dato il peso; e determinisi la mole dell'immersa sua porzione. Se adunque, data la capacità del vase, debba definirsi il peso del liquore, che in esso si racchiude: facciasi come la mole della porzione immersa alla data capacità del vase, così il dato peso del corpo ad un'altro peso; e con esso si avrà il peso del liquore, che si dimanda. Ma se al contrario, dato il peso del liquore contenuto nel vase, debba definirsi la capacità dello stesso vase: facciasi, come il dato peso del corpo al dato peso del liquore, così la mole della parte immersa ad un'altra mole; e con essa si avrà la capacità del vase ricercata.

67. Del rimanente la terza conseguenza può servirci ancora per definire il peso, di cui può caricarsi una data nave senza pericolo di potersi naufragare. Determinisi perciò, così il peso proprio della nave, come la mole della porzione di essa, che immergesi con questo peso. E poichè si sà fino dove può ella immergersi senza timore di naufragio, determinisi ancora la mole di quest'altra sua porzione. Facciasi di poi, come la prima mole alla seconda, così il peso proprio della nave ad un'altro peso; e di già con esso avremo il peso, di cui esser dee la stessa nave, per potersi immergere la seconda sua porzione. Onde, se da quest'altro peso deducasi il peso proprio della nave, avremo col residuo il peso ricercato, il quale in conseguenza potrà definirsi ancora con fare, come la prima mole alla differenza tra la prima, e la seconda, così il proprio peso della nave ad un'altro peso.

Altre

VIII.

Altre conseguenze per gli corpi, la di cui specifica gravità è maggiore di quella de' liquori.

68. COll'esame delle pressioni, che soffrono i corpi immersi ne' liquori, si è dimostrato altresì, che tenendosi sospeso uno di essi in un qualche liquore per mezzo di un filo, debba egli diminuirsi di tanto peso, quanto è quello del liquore, che ha la stessa mole coll'immersa porzione del corpo: di modo che, se la gravità specifica del corpo permetta di potersi egli immergere interamente nel liquore, sarà il peso, di cui si diminuisce, eguale al peso del liquore, che ha la stessa mole col corpo intero. Or eziandio da quest'altro teorema possono ricavarsi varie conseguenze, le quali meritano parimente di esser riferite; poichè oltre agli usi delle conseguenze precedenti, ci somministrano altre pratiche, che per essere utili, e profittevoli non sono da trascurarsi.

69. Ed in primo luogo dal riferito teorema possiamo dedurne, che essendo la specifica gravità del corpo maggiore di quella del liquore; la prima di esse debba essere alla seconda, come l'intero peso del corpo all'altro, di cui minorasi lo stesso corpo nel liquore colla sua totale immersione. In fatti la specifica gravità del corpo dee essere alla specifica gravità del liquore, come il peso del corpo al peso di una egual mole di liquore. Ma, immergendosi il corpo interamente dentro del liquore, si diminuisce egli di tanto peso, quanto è quello del liquore, che ha la stessa mole col corpo. Dunque la specifica gravità del corpo sarà alla specifica gravità del liquore, come l'intero peso del corpo all'altro, di cui minorasi lo stesso corpo nel liquore colla sua totale immersione.

70. Possiamo dedurne in secondo luogo, che se un corpo abbia maggior specifica gravità, tanto per rapporto ad un liquore, quanto per rapporto

ad

ad un' altro; le gravità specifiche di questi due liquori debbano essere come i pesi, di cui minorasi in essi il corpo colla sua totale immersione. In fatti, se dei due liquori prendansi porzioni di egual mole, saranno le loro gravità specifiche, come i pesi di queste porzioni. Ma supponendo, che le porzioni prese siano della stessa mole col corpo, i loro pesi sono eguali a quelli, di cui diminuiscesi il corpo, immergendosi interamente nei due liquori. Dunque le gravità specifiche dei due liquori saranno, come i pesi, di cui minorasi in essi il corpo colla sua totale immersione.

71. Possiamo dedurne in terzo luogo, che se due corpi di egual peso abbiano per rapporto ad un'istesso liquore maggior specifica gravità; le loro gravità specifiche debbano essere nella reciproca ragione de' pesi, di cui si diminuiscono gli stessi corpi in quel liquore colle totali loro immersioni. In fatti, essendo i due corpi di egual peso, saranno le gravità loro specifiche nella reciproca ragione delle loro moli. Ma i pesi, di cui si diminuiscono i due corpi, con immergersi interamente dentro del liquore; come eguali a quelli, che risiedono nelle due porzioni di liquore, che hanno eguali moli cogli stessi corpi, sono nella diretta ragione delle medesime moli. Dunque le specifiche gravità dei due corpi saranno ancora nella reciproca ragione de' pesi, di cui minoransi nel liquore colle totali loro immersioni.

72. Possiamo dedurne finalmente, che essendo la specifica gravità del corpo maggiore di quella del liquore contenuto in un vase; debba essere come la mole del corpo alla capacità del vase, così il peso, di cui minorasi il corpo nel liquore colla sua totale immersione, al peso di tutto il liquore. Prendasi perciò una porzione di liquore, che sia della stessa mole col corpo; ed essendo il liquore egualmente denso da pertutto, sarà il peso di questa porzione al peso di tutto il liquore, come la mole della stessa porzione, o sia del corpo alla mole di tutto il liquore, che equivale al-

la

la capacità del vase. Ma il peso della porzione presa è eguale a quello, di cui diminuiscesi il corpo, immergendosi interamente nel liquore. Dunque sarà ancora, come la mole del corpo alla capacità del vase, così il peso, di cui diminuiscesi il corpo nel liquore colla sua totale immersione, al peso di tutto il liquore.

73. Or le prime tre conseguenze parimente possono servirci per determinare le ragioni, in cui sono le specifiche gravità, tanto de' liquori, quanto de' corpi, che interamente in essi s'immergono. In fatti, se immergasi uno di questi corpi in un qualche liquore, e determinisi così l'intero suo peso, come l'altro, di cui egli si diminuisce colla sua totale immersione; colla loro ragione avremo quella, che serbano tra esso loro le specifiche gravità del corpo, e del liquore. Se poi in due liquori diversi immergasi un' istesso corpo, e si determinino i pesi, di cui egli si diminuisce colla sua totale immersione; colla loro ragione resterà determinata quella, in cui sono le specifiche gravità dei due liquori. Ed in fine, se due corpi di egual peso immergansi in un' istesso liquore, e si determinino i pesi, di cui diminuisconsi colle loro totali immersioni; la reciproca ragione di questi pesi ci darà l'altra delle specifiche gravità dei due corpi.

74. Per quanto poi alla quarta conseguenza, ella ancora potrà servirci, così per definire il peso di tutto il liquore, che si racchiude in un vase di data capacità, come per determinare la capacità del vase, in cui stà racchiuso un liquore di peso conosciuto. Immergasi perciò nel liquore un corpo, di cui sia data la mole; e determinisi il peso, di cui egli si diminuisce colla sua totale immersione. Se adunque, data la capacità del vase, debba definirsi il peso del liquore, che in esso si racchiude: facciasi come la data mole del corpo alla data capacità del vase, così il peso determinato ad un'altro peso; e con esso si avrà il peso del liquore, che si dimanda. Ma se al contrario,

trario, dato il peso del liquore contenuto nel vase, debba definirsi la capacità dello stesso vase: facciasi come il peso determinato al dato peso del liquore, così la data mole del corpo ad un' altra mole; e con essa si avrà la capacità del vase ricercata.

75. Dalla prima conseguenza intanto può ritrarsi un altro uso, e si è il modo d'investigare, se effettivamente un liquore abbia da per tutto la stessa densità. Prendasi perciò un corpo, la di cui specifica gravità sia maggiore di quella del liquore; e se mai si ritrovi, che egli in qualsisia profondità del liquore diminuiscasi sempre dello stesso peso, dovrà aversi per indubitato, che il liquore sia egualmente denso da per tutto. In fatti per la prima conseguenza la specifica gravità del corpo deve essere alla specifica gravità del liquore, come l'intero peso del corpo a quello, di cui si minora. Dunque, soffrendo il corpo in ogni profondità del liquore la stessa diminuzione di peso, la ragione delle due specifiche gravità sarà da per tutto la stessa; e pertanto, siccome la specifica gravità del corpo rimane sempre la medesima, così nepure dovrà variare l'altra del liquore nelle sue diverse profondità.

76. Un' altro uso può ritrarsi ancora dalla terza conseguenza, e si è il modo di misurare la mole di qualsisia corpo irregolare, purchè abbiasi un liquore, per rapporto a cui la specifica gravità del corpo sia maggiore. Prendasi perciò un'altro corpo, che abbia lo stesso peso col corpo dato, e sia configurato in modo, che possa determinarsi geometricamente la sua mole. Immergasi di poi nel liquore così il dato corpo, come quest' altro; e si determinino i pesi, di cui ambidue minoransi colle totali loro immersioni. Questi pesi adunque debbono essere nella reciproca ragione delle gravità specifiche degli stessi corpi. Ma per essere i due corpi di egual peso, le loro gravità specifiche sono nella reciproca ragione delle loro moli. Dunque i medesimi pesi saranno nella

la diretta ragione di queste moli. Onde, se facciasi come il peso, di cui si è diminuito il secondo corpo, al peso, di cui si è diminuito il primo dato, così la mole di quello ad un'altra mole; si avrà con essa la mole ricercata del dato corpo.

IX.

Del modo di definire la mischianza di due diverse materie.

77. Conforme formansi ben spesso corpi colla mischianza di due diverse materie, così s'ignora tal volta, quanto contengasi in essi dell' una, e quanto dell'altra. Or per questa ricerca molto utile, e profittevole eziandio può farsi uso della diminuzione di peso, che soffre il corpo, immerso interamente dentro di un liquore. In fatti per la prima conseguenza ricavata dal teorema, con cui determinasi questa diminuzione, la specifica gravità del corpo stà alla specifica gravità del liquore, come il peso intero del corpo al peso, di cui minorasi nel liquore colla sua totale immersione. Onde, se due corpi siano di una stessa specifica gravità, i medesimi colle totali loro immersioni dovranno diminuirsi di pesi proporzionali ai loro pesi interi: dimodoche, dati questi interi loro pesi, e dato altresì il peso, di cui minorasi uno dei due corpi, potrà definirsi facilmente il peso, di cui dovrà diminuirsi eziandio l'altro corpo.

78. Con questo principio egli è facile ora di risolvere il problema, di cui si tratta. Si disegni *Fig.* 1. perciò colla AB il peso del corpo formato colla mischianza di due diverse materie; e sia la AC il peso della prima, e la BC il peso della seconda. Prendansi due pezzi ad arbitrio delle due materie separate; e definiscansi, così gli interi loro pesi, come gli altri, di cui si minorano, con immergersi interamente in un'istesso liquore. Se adunque concepiscansi due altri corpi, che siano di

di egual peso col corpo dato, e di cui uno sia formato colla sola prima materia, e l'altro colla sola seconda; chiaro si è, che col divisato principio potranno definirsi altresì i pesi, di cui minoransi nello stesso liquore quest'altri due corpi ideali colle loro totali immersioni.

79. Si disegnino quest'altri pesi colle due BD, AE alzate sulla AB in modo, che siano tra loro paralelle; e congiunte l'altre due AD, BE facciasi, che la CFG sia paralella, tanto alla BD, quanto alla AE. Ciò posto, io dico primieramente, che le due CF, CG debbano disegnare i pesi, di cui minoransi nel medesimo liquore le due porzioni del corpo AC, BC. In fatti, essendo equiangoli tanto i due triangoli ABD, ACF, quanto gli altri due ABE, CBG; sarà come AB a BD, così AC a CF; e come AB ad AE, così BC a CG. Onde, attento il divisato principio, siccome le due BD, AE disegnano i pesi, di cui minoransi i due corpi ideali; così l'altre due CF, CG dovranno disegnare i pesi, di cui diminuisconsi le porzioni AC, BC del corpo dato.

80. Congiungasi in oltre la DE, con cui vadasi ad incontrare la CFG nel punto H. Ed io dico in secondo luogo, che il dato corpo colla sua totale immersione nello stesso liquore debba minorarsi di peso proporzionale alla CH. In fatti, essendo le tre AE, CH, BD parallele tra essoloro, sarà come AB a BC, così DE a DH. Ma AB sta a BC, come AE a CG; e DE sta a DH, come AE ad FH. Dunque sarà ancora, come AE a CG, così AE ad FH; e pertanto, facendosi eguali le due FH, CG, coll' aggiunta della comune CF sarà la tutta CH eguale alla somma delle due CF, CG. Onde, siccome i pesi, di cui minoransi nel liquore le porzioni del corpo dato AC, BC, sono proporzionali alle due CF, CG; così il peso, di cui diminuiscesi tutto il corpo nello stesso liquore, corrisponderà in proporzione alla CH, che è eguale alla somma delle due CF, CG.

81. Prendansi ora tre differenze una tra i pesi,

di cui diminuifconfi i due corpi ideali; un altra tra il fecondo di quefti pefi, e quello, di cui minorafi il corpo dato; e la terza tra il primo degli fteffi pefi, e quello parimente, di cui il dato corpo fi diminuifce. Ed io dico finalmente, che le diverfe materie fiano mifchiate nel dato corpo in modo, che il pefo totale del corpo, il pefo della porzione della prima materia, ed il pefo della porzione della feconda fiano, come le tre riferite differenze. Facciafi perciò parallela alla AB, tanto la EIL, quanto la HM. E conforme i tre pefi fono difegnati dalle rette AB, AC, BC, o pure dalle loro eguali EL, EI, HM; così difegnerà DL la prima differenza, HI la feconda, e DM la terza. Onde, effendo le tre EL, EI, HM, come le altre tre DL, HI, DM; eziandio i tre pefi faranno, come le tre differenze.

82. Effendo così, fi determineranno i pefi delle due diverfe materie contenute nel dato corpo; o con dividere il pefo totale del corpo in due porzioni, che fiano tra effoloro, come la feconda differenza alla terza; o pure con ritrovare due altri pefi, a cui quel pefo totale fia, come la prima differenza all'altre due. Così, fe il corpo dato fia di libre 90; e foffrendo egli la diminuzione di libre 10, fiano di libre 16, e 7 le diminuzioni, che foffrono gli altri due corpi ideali; farà di 9 libre la prima differenza, di 3 la feconda, e di 6 la terza. Onde, fi determineranno i pefi delle due materie contenute nel dato corpo; o con dividere il totale fuo pefo di 90 libre in due porzioni, che fiano come 3 a 6; o pure con ritrovare due altri pefi in modo, che il pefo totale di 90 libre abbia al primo di effi la ragione di 9 a 3, ed al fecondo la ragione di 9 a 6.

83. Del rimanente, fe il corpo fiafi formato colla mifchianza di tre diverfe materie, non poffono determinarfi i pefi delle loro porzioni colla diminuzione di pefo, che foffre il corpo in un liquore: per la ragione, che la fteffa diminuzione può averfi con infinite mifchianze diverfe. Se

però

però sia data la ragione tra il peso di una delle tre porzioni coll'intero peso del corpo, si ridurrà il problema al caso precedente, ed ecco come. Pongasi, che il peso di una porzione sia la quarta parte del peso intero del corpo. Se adunque il corpo sia di 100 libre, sarà quella porzione di libre 25, ed il composto dell'altre due di libre 75. Se poi nel liquore le 100 libre del corpo si minorino di 20, e le 25 di quella porzione si minorino di 6; il riferito composto di libre 75 dovrà diminuirsi di libre 14. Onde riducesi il problema, a determinare i pesi delle due diverse materie contenute in un corpo, che essendo di libre 75 minorasi nel liquore di libre 14.

84. Il medesimo problema riducesi eziandio al caso precedente, se sia data la ragione, che serbano tra esso loro i pesi di due delle tre porzioni; e ciò per la ragione, che può riguardarsi il corpo, come formato colla mischianza di due sole materie; di cui una sarà la materia della porzione rimanente, e l'altra quella, che si ha con mischiare insieme secondo la data ragione le materie delle due prime. Ma egli è da notarsi, che siccome per risolvere il problema coll'esposto artificio, dee aversi un pezzo di questa seconda materia, affinchè possa indagarsi la sua diminuzione di peso; così tuttavia resterà egli indeterminato, se le materie delle due porzioni, di cui è data la ragione, siano d'indole tale, che mischiate insieme secondo quella ragione formino un misto della stessa specifica gravità colla materia della porzione rimanente.

X.

Continuazione dello stesso argomento, e riflessioni intorno ai misti adulterati.

85. Il problema precedente, in cui avendosi un corpo formato colla mischianza di due diverse materie, trattasi di definire, quanto in es-

so se ne contenga dell'una, e quanto dell'altra, può risolversi ancora per mezzo di quest'altro principio, che i pesi de' corpi egualmente densi siano nella stessa ragione colle loro moli. Perciò si di-
*Fig.*1. segni di nuovo colla AB il peso del corpo formato colla mischianza delle due diverse materie; e sia la AC il peso della prima, e la BC il peso della seconda. Prendansi due pezzi ad arbitrio delle due materie separate, di cui definiscansi con esattezza le moli, o per mezzo della Geometria, se abbiano figure conosciute, o per mezzo de' pesi, di cui si diminuiscono, immersi in un'istesso liquore; e col divisato principio potranno definirsi eziandio esattamente le moli di due corpi ideali, che siano dello stesso peso col corpo dato, e di cui uno sia formato colla sola prima materia, e l'altro colla sola seconda.

86. Si disegnino le moli di questi due corpi ideali colle rette BD, AE alzate talmente sulla AB, che siano tra loro parallele. E siccome, congiunte le due AD, BE, e tirata la CFG parallela tanto alla BD, quanto alla AE, in virtù dello stesso principio debbono disegnarsi colle due CF, CG le moli delle due porzioni AC, BC del corpo dato; così, congiunta l'altra DE, e prolungata la CFG per fino a che s'incontri con essa nel punto H, dovrà la CH come eguale alla somma delle due CF, CG disegnare la mole intera del dato corpo. Onde, se prendansi tre differenze, una tra le moli dei due corpi ideali, un' altra tra la seconda di queste moli e quella del corpo dato, e la terza tra la prima delle stesse moli e quella parimente del dato corpo; saranno il peso intero del corpo dato, il peso della sua prima porzione, ed il peso della seconda, come le tre riferite differenze.

87. Quindi si determineranno i pesi di queste due porzioni del corpo dato, o con dividere il suo peso totale in due porzioni, che siano tra esso loro, come la seconda differenza alla terza; o pure con ritrovare due altri pesi, a cui quel

peso

peso totale sia, come la prima differenza all'altre due: dimodocchè, siccome nella soluzione precedente del problema, di cui si tratta, si è fatto uso de' pesi, di cui minoransi nel liquore tanto i due corpi ideali, quanto il corpo dato; così in questa impieganfi le moli degli stessi tre corpi. Ed in fatti quelli tre pesi, e queste tre moli debbono essere tra esso loro in ordinata ragione; poichè, essendo i tre corpi di un medesimo peso, le loro gravità specifiche saranno nella reciproca ragione; tanto delle loro moli, quanto de' pesi, di cui diminuisconsi nel liquore colle totali loro immersioni.

88. Qui ancora si vuol notare, che se il corpo siasi formato colla mischianza di tre diverse materie, con far uso della mole del corpo neppure potranno determinarsi i pesi delle loro porzioni; e ciò per la ragione, che la stessa mole può aversi con infinite mischianze diverse, onde si è, che il problema sia indeterminato di sua natura. Se però sia data la ragione, che ha il peso di una di esse, o col totale peso del corpo, o col peso di un'altra porzione; il problema con quest'altro dato non solo rendesi determinato, ma riducesi altresì al caso del corpo formato colla mischianza di due sole diverse materie; e per ciò potrà egli risolversi colla regola data, se pure le materie delle due porzioni, di cui è data la ragione, non siano tali, che mischiate insieme secondo quella ragione formino un misto della stessa specifica gravità colla porzione rimanente.

89. Del rimanente, siccome i corpi, che debbono esser formati con mischiare insieme due, o più materie diverse secondo una data proporzione, sogliono adulterarsi, o con mischiare le stesse materie insieme con altra proporzione, o pure con aggiungervi altre materie; così faremo ora vedere, se con ricorrere alle loro moli, o pure ai pesi, di cui minoransi in un liquore colle totali loro immersioni, possa discovrirsi questa frode. Ed in primo luogo, non è egli da porsi in dubbio, che il

il corpo in queſtione ſia adulterato, quantevolte per rapporto al corpo ſincero la ſua mole, o pure il peſo, di cui ſi diminuiſce, non corriſponde in proporzione al ſuo peſo totale; poichè, ſiccome differiſcono i due corpi per la loro gravità ſpecifica, così differiranno altresì per la miſchianza delle loro materie.

90. In ſecondo luogo, ſe il corpo in queſtione ſia formato colla miſchianza di due ſole materie diverſe, e dubbitiſi ſolamente, ſe queſte materie ſianſi miſchiate inſieme con quella proporzione, che ſi dee; certa coſa ancora ſi è, che non ſia egli adulterato, quantevolte per rapporto al corpo ſincero la ſua mole; o pure il peſo, di cui ſi minora, corriſponde in proporzione al ſuo peſo totale. Imperocche, ſiccome due ſole diverſe materie in un ſol modo poſſono miſchiarſi inſieme, per avere colla loro miſchianza un miſto, la di cui ſpecifica gravità ſia data; così, per farſi eguali tra eſſo loro le ſpecifiche gravità del corpo ſincero, e del corpo in queſtione, neceſſariamente le due diverſe materie in ambidue debbono eſſere miſchiate inſieme colla ſteſſa proporzione.

91. In terzo luogo, ſe le diverſe materie, colla di cui miſchianza è formato il corpo in queſtione, ſiano più di due, e dubitiſi ſoltanto, ſe queſte materie ſianſi miſchiate inſieme con quella proporzione, che ſi dee; potrà il corpo eſſer' adulterato, non oſtante, che per rapporto ad un' altro corpo ſincero la ſua mole, o pure il peſo, di cui ſi diminuiſce, corriſponda in proporzione al peſo ſuo totale. Imperocche, qualora le diverſe materie ſono più di due, può averſi colla loro miſchianza un miſto, la di cui ſpecifica gravità ſia data, con miſchiarle inſieme in infinite maniere diverſe. Onde, ſebbene ſiano eguali tra eſſo loro le ſpecifiche gravità del corpo ſincero, e del corpo in queſtione; pure le diverſe materie poſſono eſſere miſchiate inſieme con una proporzione nel primo, e con un' altra nel ſecondo.

92. Finalmente coll' aggiunta di altre materie può

può essere adulterato eziandio il corpo, che formar si dovrebbe con una sola materia: bastando aggiungervi due altre materie, che mischiate insieme con una certa proporzione formino un misto, la di cui specifica gravità sia la stessa con quella della materia, di cui il corpo dovrebbe essere. Per poco intanto, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che quest'altre due materie debbano essere d'indole tale, che delle loro gravità specifiche una sia maggiore, e l'altra minore della specifica gravità della materia principale. Onde, se mai la materia principale colla sua specifica gravità superi quella di ogn'altra materia; certo si è, che non sarà adulterato il corpo, quantevolte per rapporto al corpo sincero la sua mole, o pure il peso, di cui si minora, corrisponde in proporzione al suo peso totale.

93. Quindi se egli è vero, che la specifica gravità dell'oro puro sia maggiore di quella d'ogn'altro metallo, non mai i corpi, in cui dee contenersi una data porzione di oro puro, potranno adulterarsi in modo, che non si manifesti a noi la frode con ricorrere, o alle loro moli, o pure ai pesi, di cui si diminuiscono nel liquore colle totali loro immersioni; poichè, tenendosi presente il corpo sincero, così quelle moli, come questi pesi non mai potranno corrispondere in proporzione ai loro pesi totali. Non avviene però lo stesso ne' corpi, che debbono contenere una data porzione di argento puro; poichè, siccome la specifica gravità di questo metallo è maggiore di quella dello stagno, e minore di quella del piombo; così quest'altri due metalli possono mischiarsi insieme con proporzione tale, che formino un misto della stessa specifica gravità coll'argento puro.

XI.

Osservazioni da farsi per l'esattezza delle pratiche precedenti.

94. SOggiungeremo ora alcune osservazioni molto utili, e profittevoli, per potersi fare con esattezza le precedenti pratiche. Ed in primo luogo, siccome un corpo, che ha maggior specifica gravità di un liquore, non può tenersi sospeso dentro di esso, se non si attacchi ad un filo, per mezzo di cui possa sospendersi; così, facendo questo filo un tutto col corpo, bisognerà tener conto di quella sua porzione, che giace immersa nel liquore, quantevolte per mezzo della bilancia dee definirsi il peso, di cui minorasi il corpo nel liquore colla sua totale immersione. Ed in fatti quella diminuzione di peso, che ci addita la bilancia, dee ascriversi così al corpo, come alla riferita porzione di filo. Onde, per avere quella del solo corpo, dee investigarsi separatamente la diminuzione di peso, che soffre la suddetta porzione di filo, ed indi dedursi l'una dall'altra.

95. Questo stesso intanto ci conduce ad un' altra osservazione, e si è, che debba tenersi il corpo sospeso nel liquore per mezzo di un filo, la di cui specifica gravità sia o eguale, o pure maggiore di quella del liquore. Imperocchè, se mai ella fosse minore, siccome la totale immersione della riferita porzione di filo dovrebbe ascriversi in parte al suo proprio peso, ed in parte a quello del corpo; così per definire la diminuzione di peso, che soffre la stessa porzione di filo, dovrebbe aggiungersi ad essa tanto peso, quanto basta per potersi immergere interamente dentro del liquore. Quantunque poi, per investigare il peso, di cui minorasi la porzione di filo, che giace immersa nel liquore, debba questa sospendersi per mezzo di un' altro filo; nientedimeno, per non andare all'infinito, può prendersi quest'altro filo così sottile, e delicato, che la sua diminuzione di

peso

peso sia insensibile.

96. Se i corpi debbonsi tenere sospesi nell'acqua, può farsi uso de' fili, fatti con crini di cavallo: per la ragione, che siccome questi crini ritrovansi avere coll'acqua la stessa specifica gravità, così con immergersi in essa interamente si diminuiscono del loro peso totale; onde si è, che conosciutosi per mezzo della bilancia il peso, di cui diminuisconsi il corpo, ed il filo uniti insieme, basterà dedurne da esso l'intero peso del filo, per avere quello, di cui minorasi il solo corpo. E per questa stessa ragione sarebbe da desiderarsi, che per ciascun liquore vi fosse un filo della stessa sua specifica gravità: il che potrebbe ottenersi, con incrustare il filo, che ne ha meno, di altra materia più grave, per fino a che si mantenesse da se stesso dentro del liquore.

97. Per quanto alla bilancia, di cui si ha bisogno, di già ella dee essere talmente esatta, che possa additarci ogni minima differenza di peso. Ma poi, siccome in fare qualche sperimento, bisogna con due corde tenerla sospesa in modo, che non risenta altra azione, se non se quella, che deriva dal peso stesso de' corpi; così, terminato l'esperimento, dovrà ella colle stesse corde abbassarsi a poco a poco per fino a che le sue lanci posino su di una tavoletta stabile, non già colle superficie loro inferiori, ma con tre piccoli piedi di egual lunghezza uniti a dette superficie. Ed in fine, siccome nel mezzo di ciascuna lance dee porsi al di sotto un'uncino, a cui possa attaccarsi il filo, che tiene sospeso il corpo; così, affinche la riferita tavoletta non sia d'impedimento a questo filo, ancora in essa debbono farsi due forami corrispondenti ai due uncini, per cui il filo possa avere libero il passaggio.

98. Per le pratiche poi, in cui ne' liquori immergonsi corpi, che hanno per rapporto ad essi minor specifica gravità, conforme si ha bisogno delle moli, sì degli interi corpi, come di quelle loro porzioni, che restano immerse ne' liquori; così

agli

agli stessi corpi conviene dare figure tali, che agevolino la misura delle riferite moli; e perciò giova appigliarsi alle figure prismatiche, ovvero cilindriche, per la ragione, che le varie loro porzioni, tagliate con piani paralleli alle loro basi, sono colle figure intere nella semplice ragione dell'altezze. Anzi giova ancora nell'altezze di queste figure fare una scala di piccolissime parti eguali, per potersi subito definire le porzioni di esse, che restano immerse ne' liquori; ed affinche i corpi non siano così facili a scuotersi, giova finalmente formargli in modo, che abbiano molta base riguardo alla loro altezza.

99. Ma, siccome per paragonare tra esso loro le specifiche gravità di due liquori, dee immergersi in essi un'istesso corpo; così per questi sperimenti potrà farsi uso di un globo di vetro, il quale abbia al di sotto un'altro globo più piccolo, ed al di sopra un lungo cannellino eziandio di vetro. Imperocche, facendosi cavi tutti tre questi pezzi, possono essere tali le loro cavità, che riempiendosi di mercurio il globo più piccolo, formisi un tutto, la di cui specifica gravità sia minore di quella, che ritrovasi avere ciascuno dei due liquori. Onde, siccome per lo peso del mercurio, di cui è pieno il globo più piccolo, la machina nei due liquori dee mantenersi dritta, ed in sito verticale; così, con notare nel cannellino i punti fino a dove immergesi in essi la stessa machina, si farà a noi nota la ragione, in cui sono le loro gravità specifiche.

100. Per potersi intanto far uso di questa machina, a cui suol darsi il nome d'idrometro, bisogna su di essa fare una scala, per mezzo di cui possano paragonarsi tra essoloro le moli delle varie sue porzioni. Perciò, essendo AB la machina, definiscasi primieramente il suo peso, il quale sia per ragion di esempio di 500 grani; ed immersa liberamente nell'acqua, notisi nel cannellino il termine C di questa sua libera immersione. Si attacchi poscia la stessa machina per mezzo di un

Fig. 2.

filo

filo ad una delle lanci della bilancia; e posto nell'altra lance, così il peso equivalente a quello del filo, come un'altro di 20 grani, immergasi ella di nuovo nell'acqua, e notisi nello stesso cannellino il termine D di quest'altra sua impedita immersione. Se adunque la mole della porzione AC intendasi divisa in 500 parti eguali, chiaro si è, che debba contenerne 20 la mole della porzione CD.

101. Quindi si formerà la scala, di cui si ha bisogno, se divisa l'altezza della porzione CD in 20 parti eguali, si continui questa divisione per tutta l'altezza del cannellino, così al di sotto, come al di sopra di quella porzione; e conforme il punto C dee segnarsi col numero 500, così si avrà il numero, con cui dovrà segnarsi ogn'altro punto, con diminuire, o aumentare il 500 di tante unità, quante sono le parti eguali, che si framezzano tra esso, ed il punto C. Onde, attenta la formazione della scala, se immergasi la machina in due liquori diversi, ed il termine della sua immersione sia segnato per ragion di esempio col numero 496 in un liquore, e col numero 503 nell'altro; saranno le moli delle due porzioni immerse, come 496 a 503; e pertanto la specifica gravità del primo liquore sarà alla specifica gravità del secondo nella reciproca ragione degli stessi numeri, cioè come 503 a 496.

102. Del rimanente, siccome l'acqua pura, con imbeversi di particelle saline, diventa specificamente più grave; così, se di essa, e del sale faccianfi varie mischianze, di cui definiscansi le gravità specifiche colla riferita machina, potremo al contrario per mezzo di essa definire la quantità di sale, che si contiene in una data copia di acqua salsa. Ma, senza fare tante mischianze, basta indagare quale sia l'aumento, che riceve la specifica gravità dell'acqua pura, quando in una certa quantità di essa si scioglie eziandio una certa quantità di sale. Imperocche, dovendo un tal'aumento in ogni mischianza corrispondere presso a poco in

pro-

proporzione alla quantità della ragione, che serbano tra esse loro il sale, e l'acqua, che mischiansi insieme: con definire, quanto sia quest' aumento nella data copia di acqua salsa, si farà a noi nota, così la legge della sua mischianza, come la quantità di sale, che in essa si contiene.

XII.

Della velocità, con cui escono i liquori per lumi fatti ne' loro vasi.

103. SIn' ora si sono considerati i liquori nello stato loro stagnante, o sia di quiete; passeremo presentemente a considerarli nello stato di moto, supponendo in primo luogo, che escano da' loro vasi per lumi, o siano piccoli forami fatti, o ne' fondi di essi vasi, o pure ne' lati. L'esperienza stessa intanto c'insegna, che la velocità, colla quale escono i liquori per questi lumi, cambiasi col cambiamento dell'altezza, a cui elevansi sopra di essi gli stessi liquori. Onde la prima ricerca da farsi in questo nuovo argomento riguarda la ragione, secondo cui cambiasi la velocità per rapporto all'altezza. E per l'investigazione di essa giova supporre, che il vase resti sempre pieno di liquore; niente vietando, che egli dalla parte superiore riceva sempre tanto di nuovo liquore, quanto il suo lume ne tramanda.

104. Ed in vero, se pongasi a calcolo questo nuovo liquore, che continuamente riceve il vase per la parte superiore, s'intenderà facilmente, che la velocità, con cui egli esce per lo lume fatto nel vase, debba essere nella sudduplicata ragione dell'altezza, a cui elevasi il liquore sullo stesso lume. In fatti il riferito liquore tramandasi dal lume colla velocità, che egli stesso si acquista cadendo per quell'altezza. Ma si è dimostrato altrove, che la velocità, la quale acquistasi da un grave colla sua caduta, sia nella sudduplicata ragione dell'altezza, per cui cadendo si acquista. Dunque il

liquore, che dalla parte superiore del vase portasi per fino al lume, dovrà uscire per questo lume con impeto tale, che la sua velocità sia nella sudduplicata ragione dell'altezza, a cui elevasi il liquore sullo stesso lume.

105. Questo stesso intanto dee portarci a credere, che il liquore, di cui era pieno il vase prima di aprirsi il lume, debba uscire per questo lume con velocità, che essendo su'l principio molto minore, debba aumentarsi a poco a poco insino a che facciasi eguale a quella, con cui esce il nuovo liquore. In fatti, siccome la porzione di quel liquore più prossima al lume è la prima ad uscire, così escono in appresso di mano in mano le altre porzioni, che su di quella consecutivamente si elevano. Onde, conforme le altezze, per cui cadono queste porzioni, si fanno sempre più maggiori, e la massima di esse si è quella, a cui elevasi il liquore su'l lume; così eziandio la velocità, con cui tramandansi dal lume le stesse porzioni, su'l principio sarà piccola, ed indi facendosi sempre più maggiore, diventerà finalmente eguale a quella, con cui esce il nuovo liquore.

106. Ciò però non ostante, se si voglia attentamente riflettere, non si durerà fatica ad intendere, che tutte le porzioni del liquore, di cui era pieno il vase prima di aprirsi il lume, debbano uscire per questo lume con velocità eguale a quella, con cui esce per esso il nuovo liquore; ed in conseguenza che ancora questa velocità sia nella sudduplicata ragione dell'altezza, a cui elevasi il liquore sullo stesso lume. Considerisi perciò quel filamento di liquore, che ritrovasi contiguo al vase. E qualora, con aprirsi il lume, scappa per esso la porzione più bassa di questo filamento in virtù della pressione, che soffre, e lascia libero il suo luogo; chiaro si è, che caderanno di mano in mano l'una sull'altra le altre porzioni consecutive per piccole altezze, che unite insieme saranno eguali all'altezza totale del filamento.

107. Quindi, siccome nella porzione del filamento

mento, che diventa più baſſa, riuniſconſi tutte le piccole velocità, che colla loro caduta acquiſtanſi da tutte le porzioni dello ſteſſo filamento; così quella ſteſsa più baſſa porzione uſcirà per lo lume colla ſomma di tutte queſte piccole velocità. Ma, per eſſere la ſomma dell' altezze, per cui acquiſtanſi le riferite piccole velocità, eguale alla totale altezza del filamento; ancora la ſomma di eſſe velocità dee eſſere eguale alla velocità, che acquiſtaſi per quell'altezza totale. Dunque la porzione del filamento, che diventa più baſſa, uſcirà per lo lume con tanta velocità, quanta è quella, che acquiſterebbe, ſe cadeſſe per l'intera altezza del filamento. E per la ſteſſa ragione, dopo la ſua uſcita, ancora le altre porzioni del filamento uſciranno con egual velocità.

108. Quantunque poi la prima più baſſa porzione del filamento, con aprirſi il lume, ſcappi per eſſo in virtù della preſſione, che ella ſoffre; pure però la ſua velocità dee eſſer tanta, quanta è quella, che acquiſtaſi colla caduta per l'intera altezza del filamento. Imperocchè, ſiccome quella preſſione fa, che la riferita porzione del filamento diſtendendoſi ſempre più verſo il lume aperto, ſi ſprigioni finalmente dall' altre porzioni ſuperiori, ed eſca per l'apertura del lume; così la ſteſſa porzione a miſura, che diſtendeſi verſo il lume aperto, dovrà deprimerſi al contrario nel vaſe. Onde colla ſua totale depreſſione ſempre darà luogo all'altre porzioni, di cadere l'una ſull'altra per piccole altezze, la di cui ſomma ſia eguale all'intera altezza del filamento, ed in conſeguenza di comunicarle ſucceſſivamente tutte quelle piccole velocità, che acquiſtano colla loro caduta.

109. Adunque non è egli da porſi in dubbio, che nell'aprirſi il lume fatto nel vaſe, ſubito il liquore debba uſcire per la ſua apertura con tanto impeto, che la ſua velocità ſia nella ſudduplicata ragione dell' altezza, a cui elevaſi il liquore ſullo ſteſſo lume. Ed eſſendo così, chiaro ſi è, che conforme queſta velocità non dee ſoffrire diminuzio-

ne

ne veruna, quantevolte introducendosi nel vase per la parte superiore tanto di nuovo liquore, quanto dal lume se ne tramanda, si mantiene il liquore elevato su'l lume sempre alla stessa altezza; così al contrario, se in luogo del liquore, che esce per l'apertura del lume, non sostituiscasi nel vase altro nuovo liquore, per la diminuzione, che soffre l'altezza, bisognerà, che si diminuisca eziandio la velocità; e dovrà ella diminuirsi in modo, che sia sempre nella sudduplicata ragione dell'altezza, a cui il liquore rimane elevato su'l lume.

110. Merita intanto di avvertirsi in questo luogo, che se il lume facciasi, non già nel fondo, ma nella parte laterale del vase; le eguali particelle di liquore, che escono nel medesimo tempo per la sua apertura, debbano uscire con velocità diverse; e ciò per la ragione, che diverse altresì sono le altezze, a cui ritrovasi elevato il liquore nel vase per rapporto alle varie rette orizontali, che possono tirarsi nell'ampiezza del lume. Ma, siccome queste diverse velocità debbono essere tanto meno differenti tra essoloro, quanto è meno ampio il lume, per cui esce il liquore dal vase; così non per altra ragione vogliamo, che il riferito lume sia piccolo, se non se per conseguire, che le particelle di liquore, le quali escono per la sua apertura nel medesimo tempo, abbiano tutte presso a poco la stessa velocità: condizione per altro, di cui non si ha bisogno, quando il lume al contrario si fa nel fondo del vase, e non già nella parte sua laterale.

111. Del rimanente, se con lumi di questa indole abbiansi due vasi, che mantenganfi constantemente pieni di liquore, e siano date l'altezze, a cui ascende il liquore sulli loro lumi; con conoscersi la velocità di uno di essi, potrà definirsi eziandio quella dell'altro. Ritrovisi perciò la mezza proporzionale tra le due altezze date; e se facciasi come l'altezza del primo vase a questa mezza proporzionale, così la velocità dello stesso vase

se ad un'altra velocità, con essa si avrà la velocità, che si dimanda. Per lo contrario poi, se siano date le velocità di ambidue i vasi, con conoscersi l'altezza del liquore in uno di essi, si conoscerà parimente l'altezza del liquore nell'altro. Facciasi perciò, come la velocità del primo vase alla velocità del secondo, così l'altezza del liquore nel primo ad un'altra altezza; e colla terza proporzionale dopo queste due altezze si avrà l'altezza, che si dimanda.

XIII.

Delle quantità de' liquori, che escono per lumi diversi, paragonate tra esso loro.

112. DEterminata la ragione, che serbano tra essoloro le velocità, con cui escono i liquori per lumi fatti ne' loro vasi; paragoneremo ora insieme le quantità, che ne tramandano gli stessi lumi, ritenendo la stessa supposizione fatta di sopra, che ciascun vase riceva per la parte superiore tanto di nuovo liquore, quanto il lume di esso ne scarica. Ed in vero, se si voglia attentamente riflettere, s'intenderà facilmente, che in qualsisia vase la quantità di liquore, che dal suo lume tramandasi, debba ripetersi da tre fonti, cioè dalla velocità, colla quale si tramanda; dall'ampiezza del lume, per cui esce fuori; e dal tempo, che impiegasi nell' uscita di esso. Onde sì è, che in due vasi diversi le quantità di liquore, che escono per gli loro lumi, debbano essere in ragione composta delle velocità, de' lumi, e de' tempi.

113. In fatti, qualora il liquore incomincia ad uscire, per la constante velocità, con cui egli esce, si farà l'effusione di esso con moto equabile, ed uniforme. Quindi quanto più la prima porzione, che esce, portasi lontano con quella velocità, tanto maggiore sarà il numero dell'altre eguali, che la seguono. Onde dovrà giudicarsi, di tutta la quantità di liquore, che esce fuori dal lume, così per lo spazio percorso dalla prima porzione,

co-

come per lo numero delle particelle di liquore contenute nella stessa porzione. Ma quello spazio dee ripetersi, non solo dalla velocità, ma eziandio dal tempo; e questo numero di particelle corrisponde in proporzione all'ampiezza del lume. Dunque, per giudicare della totale quantità di liquore mandata fuori dal lume, dovrà tenersi conto della velocità, del lume, e del tempo.

114. Adunque secondo si è detto, se abbiansi due vasi, che mantenganfi constantemente pieni di liquore; le quantità, che di esso tramandansi dai loro lumi, saranno in ragion composta delle velocità, de' lumi, e de' tempi. Ma, siccome da questo general teorema può dedursi in primo luogo, che le riferite quantità debbano essere in ragion composta delle velocità, e de' lumi, essendo eguali i tempi; delle velocità, e de' tempi, essendo eguali i lumi; ed in fine de' tempi, e de' lumi, essendo eguali le velocità: così potremo ricavarne in oltre, che le stesse quantità debbano essere nella semplice ragione delle velocità, essendo eguali tanto i lumi, quanto i tempi; nella semplice ragione de' lumi, se siano eguali così i tempi, come le velocità; ed in fine nella semplice ragione de' tempi, essendo eguali tanto le velocità, quanto i lumi.

115. Dallo stesso teorema generale possiamo dedurne eziandio altri speciali intorno all' uguaglianza delle medesime quantità di liquore: siccome in effetto debbono quelle esser' eguali tra esso loro; primieramente, se insieme colle velocità siano eguali, tanto i lumi, quanto i tempi; in secondo luogo, se essendo eguali le sole velocità, i lumi siano nella reciproca ragione de' tempi; in terzo luogo, se essendo eguali i soli lumi, le velocità siano nella reciproca ragione de' tempi; in quarto luogo, se essendo eguali i soli tempi, le velocità siano nella reciproca ragione de' lumi; ed in fine, se non essendovi uguaglianza veruna, le velocità siano in ragion composta della reciproca de' lumi, e della reciproca ancora de' tempi.

116. Conforme poi col riferito teorema generale paragonansi insieme le quantità di liquore, che escono per gli lumi di due vasi; così da esso possiamo dedurne tre altri eziandio generali per paragonare tra esso loro, e le velocità, e i lumi, e i tempi. In fatti, per quanto alle velocità, queste debbono essere in ragion composta della diretta delle quantità di liquore, della reciproca de' lumi, e della reciproca ancora de' tempi. Per quanto poi ai lumi, la loro ragione dee esser composta della diretta delle quantità di liquore, della reciproca delle velocità, e della reciproca ancora de' tempi. Ed in fine, per quanto ai tempi, si componerà la ragione di essi della diretta delle quantità di liquore, della reciproca delle velocità, e della reciproca ancora de' lumi: dai quali teoremi generali ognuno vede, quanti altri speciali possono ricavarsi.

117. Volendosi aumentare di vantaggio, così il numero de' teoremi generali, come l'altro de' speciali, che da quelli ricavar si possono; in luogo della semplice ragione, in cui sono le velocità, potrà sostituirsi la sudduplicata dell'altezze, a cui il liquore elevasi sulli lumi nei due vasi. Anzi riceveranno nuovo aumento tanto gli uni, quanto gli altri teoremi, se supponendo, che i lumi fatti ne' vasi siano circolari, in luogo della semplice ragione di essi lumi sostituiscasi la duplicata de' loro diametri. Ma, senza perdere il tempo in riferire minutamente i teoremi, che formar si possono colle riferite sostituzioni, più tosto facciamo vedere, come per mezzo delle quantità di liquore, che escono per gli lumi di due vasi constantemente pieni, possa comprovarsi, che le loro velocità siano nella sudduplicata ragione dell'altezze, a cui mantienesi elevato il liquore sugli stessi lumi.

118. Ed in vero di già è stato avvertito, che essendo eguali così i lumi, come i tempi, le due quantità di liquore debbano essere nella semplice ragione delle velocità. Prendansi adunque due vasi, che con diverse altezze abbiano lumi eguali; e mantenendosi ciascuno di essi constante-

mente

mente pieno di liquore, definiscansi le altezze, a cui lo stesso liquore elevasi sulli lumi dei due vasi. Si determinino poscia le quantità, che ne scaricano i due lumi eguali in tempi eziandio eguali; e se mai ritrovisi, che queste quantità siano nella sudduplicata ragione di quelle altezze, dobbiam conchiudere, che eziandio le velocità, con cui le medesime quantità sono uscite fuori, siano nella stessa sudduplicata ragione: come in fatti, se facciasi l'esperimento con esattezza, si vedrà, che le velocità serbino presso a poco tra essoloro la riferita ragione.

119. Intanto può comprovarsi la stessa verità in due altre maniere diverse, purchè i lumi eguali facciansi ne' lati dei due vasi. Per quanto alla prima, applichinsi a questi lumi laterali in sito orizontale due tubi di egual diametro, per cui i liquori possano scorrere liberamente, quando escono per gli stessi lumi. E siccome le lunghezze di questi tubi percorronsi dai due liquori colle stesse velocità, colle quali escono; così non è egli da porsi in dubbio, che le medesime siano colle velocità nella stessa ragione, quantevolte si percorrono in tempi eguali. Facciasi adunque, che le lunghezze dei due tubi siano nella sudduplicata ragione dell'altezze, a cui elevasi il liquore sulli lumi dei due vasi; e se mai ritrovisi, che aperti insiememente i lumi, escano i liquori per gli tubi eziandio insieme, dovrà conchiudersi, che ancora le velocità siano nella stessa sudduplicata ragione.

120. Per quanto alla seconda, applichinsi presso i lumi laterali due tavolette levigate talmente in sito verticale, che i liquori radano i loro piani, quando escono per gli stessi lumi. E siccome questi liquori, a guisa de' projetti, descrivono colle loro velocità due parabole, che debbono avere per vertici i lumi, e per assi le verticali abbassate dagli stessi lumi; così tanto le velocità, quanto le ordinate corrispondenti ad ascisse eguali, dovranno essere nella sudduplicata ragio-

ne de' loro parametri. Onde, se nell' uscita de' liquori si determinino sulle tavolette le lunghezze di due di quest' ordinate, e ritrovisi, che le medesime siano nella sudduplicata ragione dell'altezze, a cui ascende il liquore sulli lumi dei due vasi; non v'ha dubio, che ancora le velocità debbano essere tra essoloro nella stessa sudduplicata ragione.

XIV.

Della cateratta, che formasi dentro de' vasi nell' effusione de' loro liquori.

121. Qualora un vase mantienesi constantemente pieno di liquore, ed egli lo scarica per un lume fatto, o nel suo fondo, o pure ne' suoi lati; formasi dentro di esso una cateratta, per cui precipita tutta la copia di liquore, che per quel lume esce fuori dal vase. Per intenderne la ragione, e per definire altresì la figura di questa cateratta; fingiamo, che il vase sia cilindrico, e che il lume siasi fatto nel mezzo del suo fondo di figura ancora circolare. Concepiscasi diviso il liquore, di cui è sempre pieno il vase, in strati orizontali, che siano di un'altezza infinitamente piccola. E siccome non è egli da porsi in dubio, che la prima ad uscire sia la porzione del primo strato, che insiste sul lume; così neppure potrà negarsi, che debbano uscire in appresso di mano in mano porzioni degli altri strati, che su di quel primo consecutivamente si elevano.

122. Or coi vuoti di queste porzioni, che con mantenersi il vase constantemente pieno di liquore, debbono rimanere sempre gli stessi, formasi la cateratta, per cui precipita la copia di liquore, che esce fuori dal vase. Quindi, siccome la sua figura dee ripetersi dall'ampiezze dei riferiti vuoti, così egli è facile il dimostrare, che le loro ampiezze siano nella ragion sudduplicata reciproca dell'altezze, a cui ascende il liquore sopra di essi. In fatti quella quantità di liquore, che in un dato tempo tramandasi dal lume fatto nel fondo del

vase

vase, dee passare altresì nello stesso tempo per ciascuno dei vuoti della cateratta. Onde, questi vuoti, siccome debbono essere nella reciproca ragione delle velocità, con cui il liquore passa per essi; così saranno altresì nella ragion sudduplicata reciproca delle riferite altezze.

123. Pongasi adunque, che C sia il centro del lume circolare fatto nel fondo del vase, CB il raggio dello stesso lume, ed AC l'altezza, a cui il liquore su di esso mantienesi sempre elevato. Descrivasi colla AC come asse la curva BD d'indole tale, che il quadrato della sua ordinata CB sia al quadrato di ogn'altra ordinata HF nella reciproca sudduplicata ragione dell'ascisse corrispondenti AC, AH; e colla rivoluzione di questa curva intorno al suo asse AC. si avrà la cateratta, di cui si tratta. In effetto, siccome il vuoto di essa nel punto C è il lume circolare, che ha per raggio la CB; così il vuoto della medesima in ogn' altro punto H sarà il cerchio, che ha per raggio la HF; onde questi due vuoti saranno tra essoloro, come i quadrati dei loro raggi CB, HF. Ma si vuole, che questi due quadrati siano nella reciproca sudduplicata ragione dell'ascisse AC, AH, che sono le altezze, a cui elevasi il liquore sulli due voti. Dunque ancora que' vuoti saranno nella reciproca sudduplicata ragione delle stesse altezze. *Fig. 3.*

124. Or conforme può determinarsi ogn' altro punto F della curva BD, colla di cui revoluzione descrivesi la cateratta, se tirata la AE parallela alla CB, e presa su di essa una porzione AP ad arbitrio facciasi, che la PF paralella alla AC sia alla stessa AC nella quadruplicata ragione di CB ad AP; così per poco, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che le due AE, AC debbano essere asintoti della stessa curva. Infatti, con prendersi la AP più lunga, o più corta, dee farsi al contrario la PF di minore, o maggior lunghezza. Dunque, siccome aumentandosi la AP all'infinito, diventa la PF infinitamente piccola;

 così

così per lo contrario minorandosi all' infinito la stessa AP, diventerà la PF infinitamente lunga. Ma questo fa, che la curva si accosti sempre più alle due AE, AC, senza poterle giammai incontrare. Dunque le due AE, AC debbonsi avere come asintoti della stessa curva.

125. Quindi la cateratta, che formasi su'l lume circolare fatto nel fondo del vase, giungerà per fino alla suprema superficie del liquore, quante volte così il vase, come questa superficie è di un' ampiezza infinita. Ma, siccome il vase, per quanto egli facciasi ampio, non mai può ricevere ampiezza tale, che sia infinita; così la cateratta formata su'l suo lume dee interrompersi ad una certa altezza. Ed in fatti, se PQQP sia il vase cilindrico, nel di cui fondo, e propriamente nel mezzo si è fatto il lume; chiaro si è, che la curva BD, colla di cui rivoluzione intorno al suo asse AC generasi la cateratta, debba incontrarsi col lato del vase PQ in un qualche punto, come F. Onde, se HF sia l'ordinata della curva corrispondente a questo punto, dovrà interrompersi la cateratta, formata su'l lume, all'altezza CH. Dal che si vede, che con farsi il vase più ampio debba interrompersi la cateratta sul lume eziandio ad altezza maggiore.

126. Or siccome per l'ampiezza limitata del vase la cateratta, che formasi dentro di esso, dee interrompersi all'altezza CH; così per questo suo interrompimento dovrà aumentarsi la velocità, con cui passa il liquore per gli vuoti, che possono distinguersi nell'altezza rimanente AH. Perciò convien riflettere, che questi vuoti sono minori di quelli, per cui passerebbe il liquore, se giungesse la cateratta per fino alla sua suprema superficie. Onde, siccome aggruppasi in essi quella porzione di liquore, che dovrebbe passare per gli vuoti più ampj della cateratta, se ella fosse continuata; così questo suo aggruppamento darà luogo all'altre porzion, che seguono, di poter' agire su di essa, e di aumentare in conseguenza la sua velocità. Per quanto poi all'aumento, che riceve

la

la riferita velocità, egli è facile il dimostrare, che ella debba aumentarli [illegible] fino a che facciasi eguale a quella, che acquistasi colla caduta per la AH.

127. In fatti, non per altra ragione ne' vuoti corrispondenti alla AH aggruppasi il liquore, ed aumentasi la sua velocità, se non perchè possa passare per essi in egual tempo quella stessa copia di liquore, che tramandasi tanto dal lume del vase, quanto da ogn' altro vuoto della cateratta. Ma ciascuno di detti vuoti è eguale a quello, che avendo per raggio la HF occupa nella cateratta il supremo luogo; e per lumi, o siano vuoti eguali non possono tramandarsi eguali quantità di liquore in tempi eguali, se non siano eguali ancora le velocità, con cui si tramandano. Dunque, siccome il liquore passa per lo vuoto della cateratta, che ha per raggio la HF, colla velocità acquistata per la AH; così eziandio ne' vuoti corrispondenti alla AH dovrà aumentarsi la velocità del liquore, che passa per essi, per fino a che faccia si eguale a quella, che acquistasi per la stessa AH.

128. Essendo così, conforme aperto il lume e tolto via l'equilibrio tra le pressioni, che esercitavansi dalle varie parti del liquore, incomincia questo ad uscire subito, che ritrovasi in circonstanze tali, che possa essere il suo moto in istato di permanenza; così queste circostanze riduconsi a tre, di cui la prima si è, che quella porzione di liquore, che rimane fuori della cateratta nel luogo laterale, debba essere priva di ogni velocità; la seconda, che le varie parti di quell'altra porzione, che in mezzo alla prima resta racchiusa dentro della cateratta, debbano avere ne' loro luoghi que' gradi di velocità, che acquistansi per le altezze, a cui ascende il liquore sopra di esse; e la terza finalmente, che nelle varie parti della rimanente porzione di liquore, che occupa nel vase il luogo PFFP, debba ritrovarsi una velocità constante, ed eguale a quella, che acquistasi colla caduta per la AH.

129. Potrebbe intanto ridirsi, che la figura della cateratta possa essere un cilindro, che avendo per base il lume stesso del vase elevasi col liquore alla stessa altezza; e ciò per la ragione, che quel tanto diciamo avvenire al liquore, quando passa per gli vuoti corrispondenti alla AH, può accadergli altresì, quando passa per gli vuoti del riferito cilindro. Ma si risponde, che una cateratta di questa indole non possa aver luogo; poichè, siccome sarebbe ella da per tutto cinta di liquore, le di cui parti cedono ad ogni minima forza motrice; così dovrebbero slargarsi i suoi vuoti, quantevolte il liquore in essi si aggruppa, onde tutta via la cateratta prenderebbe la divisata figura. Del rimanente una consimile cateratta dee formarsi dentro del vase, qualunque sia la sua figura, ed ovunque facciasi il suo lume; ma si è stimato esaminare il caso, quando il vase è di figura cilindrica, ed il lume si fa nel mezzo del suo fondo di figura eziandio circolare, sì per potersi avere di essa una nozione più distinta, come ancora per potersi la medesima più facilmente porre a calcolo.

XV.

Della quantità di liquore, che dee uscire dal vase in un tempo dato.

130. Colla cateratta, che formasi dentro del vase nell'uscita del liquore, che si mantiene elevato su'l lume sempre alla stessa altezza, si fanno ora a noi note molte altre verità, per l'intelligenza delle quali giova tutta via supporre, che il vase sia di figura cilindrica, e che il lume siasi fatto nel mezzo del suo fondo di figura eziandio circolare. Ripiglisi perciò la stessa figura di prima, cosicche CB sia il raggio del lume circolare, AC l'altezza constante del liquore, BD la curva generatrice della cateratta, ed AE l'altro suo asintoto. E la prima verità, che si fa a noi nota, si è, che nel tempo della caduta per *Fig. 3.*

l'in-

l'intera altezza AC debba uscire dal lume tanto liquore, quanto ne addita il duplo del cilindro, che ha per base lo stesso lume, e per altezza la stessa AC.

131. In fatti nel tempo di quella caduta tramandasi dal lume la stessa copia di liquore, che contiene la cateratta, continuata per sino alla suprema sua superficie. Onde basterà far vedere, che la capacità della cateratta sia dupla della capacità del riferito cilindro. Perciò intorno alla AC come asse concepiscasi descritta un'altra curva IL, in cui le ordinate CI, HK siano nella reciproca sudduplicata ragione dell'ascisse corrispondenti AC, AH. E se intendasi divisa la cateratta per infiniti piani paralleli al lume, ed egualmente distanti l'uno dall'altro; saranno le sezzioni circolari fatte nella cateratta, come le ordinate corrispondenti di quest'altra curva; e pertanto la somma di quelle sezzioni sarà al lume preso altrettante volte, come la somma di quest'ordinate alla CI presa ancora altrettante volte.

132. Or facendosi uso del metodo degli indivisibili, siccome colla somma delle sezzioni fatte nella cateratta si ha la sua capacità, e con prendersi il lume altrettante volte si ha la capacità del cilindro, che ha per base lo stesso lume, e per altezza la AC; così colla somma dell'ordinate, che nella curva IL corrispondono a quelle sezzioni, si avrà lo spazio mistilineo EACIL, e con prendersi la CI altrettante volte si avrà il rettangolo delle due AC, CI. Dunque sarà ancora, come la capacità della cateratta alla capacità del cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la AC, così lo spazio mistilineo EACIL al rettangolo delle due AC, CI; e pertanto, se mai possa dimostrarsi, che quello spazio sia duplo di questo rettangolo, resterà dimostrato altresì, che la capacità della cateratta sia dupla della capacità del riferito cilindro.

133. Per dimostrarlo, siano nella curva IL infinitamente vicine tra loro le due ordinate CI,

NM

NM, e facciansi le due IS, MO parallele alla AC. E poichè i quadrati delle due ordinate CI, NM sono nella reciproca ragione dell'ascisse corrispondenti AC, AN; sarà ancora, come il primo quadrato alla loro differenza, così l'ascissa AN ovvero AC alla CN. Ma la differenza dei due quadrati, come eguale al rettangolo della somma de' loro lati nella differenza degli stessi lati, non differisce dal rettangolo, che si fa dall'ordinata CI nel duplo della MV. Dunque sarà ancora come l'ordinata CI al duplo della MV, così l'ascissa AC alla CN. Quindi, facendosi il rettangolo delle due CI, CN duplo del rettangolo dell'altre due AC, MV; sarà ancora il piccolo trapezio ICNM duplo dell'altro piccolo trapezio ISOM. Ed avendo luogo la stessa dimostrazione da per tutto, sarà l'intero spazio EACIL duplo, così dello spazio ESIL, come del rettangolo delle due AC, CI.

Fig. 4. 134. Non deesi adunque porre in dubbio, che nel tempo della caduta per l'intera altezza AC debba uscire dal lume tanto liquore, quanto ne addita il duplo del cilindro, che ha per base lo stesso lume, e per altezza la stessa AC. Ma per dimostrare una tal verità con altri principj, senza far uso della cateratta, che formasi dentro del vase, fingiamo, che nel piccolo tempo, in cui con moto incominciato dal punto A descrivesi la CN, esca dal lume il piccolo strato di liquore BOOB, che può riguardarsi come un piccolo cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la CN. Descrivasi intorno alla AC come asse la parabola AI; e prolungate le due CB, NO per fino a che s'incontrino con essa ne' punti I, ed M, facciasi la MV parallela alla AC. I tempi adunque, che impieganfi nella caduta per le due AC, AN, siccome debbono essere nella sudduplicata loro ragione, così per la parabola saranno come CI ad NM. Onde il tempo, che impiegasi nella caduta per la AC, sarà al tempo, che con moto incominciato dal punto A impiegasi per la CN, come CI ad IV.

135. Ti-

135. Tirisi inoltre la IT, che tocchi la parabola nel punto I; e potendosi riguardare l'archetto parabolico IM come porzione di questa tangente, sarà come CI ad IV, così CT a CN. Quindi ancora i due divisati tempi saranno nella ragione di CT a CN; e pertanto, conforme le quantità di liquore, che tramandansi dal lume negli stessi tempi, debbono essere nella loro ragione, così eziandio queste quantità di liquore saranno nella ragione di CT a CN. Ma nel secondo piccolo tempo tramandasi dal lume tanto liquore, quanto ne contiene il piccolo cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la CN. Dunque nel primo tempo, che è quello della caduta per l'intera altezza AC, dovrà tramandarsi dal lume tanto liquore, quanto ne contiene il cilindro, che ha per base lo stesso lume, e per altezza la CT, la quale CT per la tangente della parabola è dupla della AC.

136. Or conforme nel tempo della caduta per la AC tramandasi dal lume tanto liquore, quanto ne addita il duplo del cilindro, che ha per base lo stesso lume, e per altezza la stessa AC; così se prendasi nella AC un punto H ad arbitrio, e tra le due AC, AH ritrovisi la mezza proporzionale, che sia AR, egli è facile il dimostrare, che nel tempo della caduta per la AH debba tramandarsi dal lume tanto liquore, quanto ne dimostra il duplo del cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la AR. In fatti, essendo le tre AC, AR, AH continuamente proporzionali, sarà la prima AC alla seconda AR in sudduplicata ragione della prima AC alla terza AH. Ma in questa stessa sudduplicata ragione sono altresì, tanto i tempi della caduta per le due AC, AH, quanto le quantità di liquore, che escono dal lume in questi tempi. Dunque le medesime quantità di liquore saranno eziandio nella semplice ragione di AC ad AR; e pertanto, siccome la prima di esse uguaglia il duplo del cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la AC, così la

se-

ſeconda ſarà eguale al duplo del cilindro, che ha per baſe lo ſteſſo lume, e per altezza la AR.

137. Specialmente poi, ſe il punto H prendaſi in quel luogo della AC, ove la cateratta s'interrompe, uſcirà dal lume nel tempo della caduta per la AH il duplo di quel liquore, che ſi contiene nella porzione del vaſe PFFP. In effetto il liquore contenuto in queſta porzione del vaſe, che ſimilmente ha forma di cilindro, ſta al liquore contenuto nel cilindro, che ha per baſe il lume, e per altezza la AC, in ragion compoſta della duplicata delle due HF, CB, e della ſemplice dell'altre due AH, AC. Ma per l'indole della cateratta la duplicata delle due HF, CB è eguale alla ſudduplicata reciproca dell'altre due AH, AC, Dunque i due riferiti liquori ſaranno tra eſſoloro ſoltanto nella ſudduplicata diretta delle ſteſſe due AH, AC. Quindi la ragione dei due liquori ſarà eguale a quella de' tempi, che impieganſi nella caduta per le due AH, AC; e pertanto ſiccome nel tempo della caduta per la AC eſce dal lume il duplo del ſecondo liquore, così nel tempo della caduta per la AH dovrà uſcire dallo ſteſſo lume il duplo del primo liquore.

138. Del rimanente, ſe ſia data, così l'ampiezza del lume, come la coſtante altezza del liquore, niente ſara più facile, quanto di definire la quantità di liquore, che deè uſcire dal lume in qualſiſia dato tempo. In fatti di già ſi sà, che il tempo della caduta per un'altezza di quindeci piedi con una dodiceſima parte di più ſia di una ſeconda. Ma i tempi della caduta per diverſe altezze ſono nella ſudduplicata loro ragione. Dunque, eſſendo nota la coſtante altezza del liquore AC, ſapremo altresì il tempo della caduta per queſt'altra altezza. Se poi ſi moltiplichi l'ampiezza del lume per lo duplo della AC, di già ſi ha la quantità di liquore, che eſce dal lume nel tempo della caduta per la AC. Ma le quantità di liquore, che tramanda il lume in tempi diverſi, debbono eſſere nella ragione degli ſteſſi tempi. Dunque neppure ignoreremo la quantità di liquo-

re,

re, che dovrà uscire dal lume nel tempo dato.

XVI.

Del liquore, che si agita nell'aprirsi il lume; e del moto, che in esso si genera.

139. PEr mezzo della cateratta, che formasi dentro del vase nell' uscita del liquore, rendesi inoltre a noi nota, così la copia del liquore, che si agita, e si pone in moto nell'aprirsi il lume, come la forza, o sia moto, che risiede in quella copia nell'atto di uscire per lo stesso lume. Perciò ripiglisi di nuovo la stessa figura di sopra; e per quanto alla copia di liquore, che si scuote nell'apertura del lume, la cateratta stessa ci addita, che ella si compone, così del liquore, che si racchiude nella porzione FBBF della medesima cateratta, come dell'altro contenuto nella porzione superiore del vase PFFP. Onde, conforme la medesima rimane determinata, con definire l'uno e l'altro di questi due liquori; così ci studieremo di definirli per mezzo di due cilindri, che abbiano per base lo stesso lume, per cui dee uscire il liquore: dimodocchè non dovremo fare altra cosa, se non se determinare l'altezze, che debbono avere questi due cilindri.

Fig. 4.

140. Ed in primo luogo, per quanto al liquore racchiuso nella porzione della cateratta FBBF, facciasi, che la AR sia mezza proporzionale tra le due AC, AH; ed io dico, che egli sia eguale al duplo del cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la CR. In fatti, secondo è stato dimostrato, le quantità di liquore, che escono dal lume ne' tempi della caduta per le due AC, AH sono eguali ai dupli de' cilindri, che avendo per base il lume elevansi all'altezze AC, AR. Dunque la quantità di liquore, che esce per lo stesso lume nel tempo, in cui con moto incominciato dal punto A descrivesi la HC, sarà eguale al duplo del cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la CR. Ma questa quantità di liquore è quel-

quella, che si racchiude nella porzione della cateratta FBBF. Dunque il liquore racchiuso in questa porzione di cateratta similmente sarà eguale al duplo del cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la CR.

141. In secondo luogo, per quanto all'altro liquore, contenuto nella porzione superiore del vase PFFP, facciasi di nuovo, che la AR sia mezza proporzionale tra le due AC, AH; ed io dico, che egli sia eguale, non già al duplo, ma al semplice cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la AR. In fatti, conforme si è dimostrato, che nel tempo della caduta per la AH debba uscire dal lume tanto liquore, quanto ne contiene il duplo del cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la AR; così si è avvertito altresì, che questo stesso liquore sia duplo di quello contenuto nella porzione superiore del vase PFFP. Dunque il liquore contenuto in questa porzione di vase sarà eguale al cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la AR. Ed essendo così, chiaro si è, che nell'apertura del lume debba scuotersi nel vase tanto liquore, quanto ne contiene il cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la somma delle due AC, CR.

142. Quindi possiamo inoltre definire, quanto sia il liquore, che nell'apertura del lume rimane immobile nel vase. Facciasi perciò, che la CS sia quarta continuamente proporzionale dopo le due AH, AC; ed io dico, che egli sia tanto, quanto ne contiene il cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la differenza delle due AS, CR. In fatti, siccome per l'indole della cateratta l'ampiezza del lume, e l'ampiezza del fondo sono nella sudduplicata ragione di AH ad AC; così in questa stessa sudduplicata ragione sarà altresì AC a CS. Dunque, essendo l'ampiezza del lume all'ampiezza del fondo, come AC a CS; sarà l'intero liquore del vase eguale al cilindro, che ha per base il lume, e per altezza la CS. Ma nell'apertura del lume si pone in moto tanto liquore, quanto ne contiene il cilin-

lindro, che ha per base il lume, e per altezza la somma delle due AC, CR; Dunque l'altro, che rimane immobile, sarà eguale al cilindro, che ha per base lo stesso lume, e per altezza la differenza delle due AS, CR.

143. Or siccome il liquore, che nell'apertura del lume si scuote, impiega il suo peso in procurarsi l'uscita per lo stesso lume; così sarà premuto il fondo del vase dal solo peso dell'altro liquore, che rimane immobile. Quindi niente sarà più facile, quanto di vedere coll'esperienza, se i due liquori siano di quella copia, di cui gli abbiamo definiti, ed ecco come. Primieramente per mezzo di una bilancia si determini il peso del liquore contenuto nel vase; indi aperto il lume, si definisca altresì la diminuzione di peso, che egli soffre. E se il peso, di cui si diminuisce, sia al peso rimanente, come la somma delle due AC, CR alla differenza delle due AS, CR, non sarà da porsi in dubbio, che i due liquori siano eguali ai due cilindri, che avendo per base il lume elevansi all'altezze, che ci additano quella somma, e quella differenza: ben'inteso però, che aperto il lume dee mantenersi il liquore elevato alla stessa altezza di prima.

144. Determinata la copia di liquore, che si agita, e si pone in moto nell'apertura del lume, passeremo ora a definire la forza, o sia il moto, che risiede in quella copia nell' atto di uscire per lo stesso lume. Ed in vero, siccome il moto di tutta la copia di liquore, che si scuote, dee ripetersi dalla somma de' moti di tutte le minime sue particelle; così; per definire i moti parziali di queste particelle, dovrà tenersi conto della velocità, con cui ciascuna di esse si agita, e si pone in moto. Onde giova rammentarsi, che sebbene aperto il lume scuotasi, così il liquore racchiuso nella porzione della cateratta FBBF, come l' altro contenuto nella porzione superiore del vase PFFP; nientedimeno per quanto al moto differiscono tra essoloro questi due liquori in ciò,

che

che ciascuna particella del primo è scossa colla velocità, che si acquista colla caduta per l'altezza, a cui elevasi il liquore sopra di essa, quandoche le particelle del secondo sono tutte agitate con velocità constante, ed eguale a quella, che acquistasi colla caduta per la AH.

145. Ma, oltre a ciò, conviene ancora riflettere, che nelle particelle del liquore contenuto nella porzione superiore del vase non per altra ragione generasi una velocità constante, ed eguale a quella, che acquistasi colla caduta per la AH, se non perchè possa passare in egual tempo per la sezzione circolare FF quella stessa copia di liquore, che passerebbe per essa, se la cateratta senza interrompersi giungesse ~~per~~ sino alla suprema superficie del liquore. Imperocche da ciò siccome ne segue, che il moto del liquore racchiuso nella riferita porzione del vase sia eguale al moto di quello, di cui si riempirebbe la porzione della cateratta DFFD; così possiamo altresì ricavarne, che il moto di tutto il liquore scosso debba farsi eguale al moto di quello, che occuperebbe la capacità dell'intera cateratta. Onde, con definire il moto di questo liquore, resterà determinata eziandio il moto dell'altro.

146. Distinguasi perciò dentro del vase un cilindro di liquore, che abbia per base il lume, e per altezza la AC. E se mai in ciascuna sua particella si generasse una velocità constante, ed eguale a quella, che acquistasi colla caduta per la AC; non v' ha dubio, che egli ancora in egual tempo tramanderebbe per lo lume quella stessa copia di liquore, che dovrebbe tramandarsi dal liquore, che riempirebbe la capacità dell'intera cateratta. Onde, siccome i moti di questi due liquori si farebbero eguali tra essoloro, così dobbiam conchiudere, che nel liquore scosso coll'apertura del lume, risieda tanto moto, quanto è quello di un cilindro di liquore, che avendo per base il lume, e per altezza la AC, tiene agitate tutte le sue particelle con velocità constante, ed eguale a quella, che acqui-

quiſtaſi colla caduta per la ſteſſa AC: dimodochè, per reſiſtere all'impeto del liquore ſteſſo, ſi avrà biſogno di tanta forza, quanta ſe ne richiede per produrre il moto del diviſato cilindro.

147. Ed eſſendo così, niente ora ſarà più facile, quanto di definire la velocità mezza del liquore ſcoſſo, cioè a dire la velocità, con cui muovendoſi ogni particella di quel liquore, ſi abbia lo ſteſſo moto, che generaſi in eſſo col ſuo ſcuotimento. Sia perciò come ſopra, la AR mezza proporzionale tra le due AC, AH; e facciaſi come la ſomma delle due AC, CR, alla ſola AC così la ſteſſa AC ad un'altra altezza, che ſia CX. Io dico, che colla caduta per la CX debba acquiſtarſi la velocità ricercata. In fatti le velocità, che acquiſtanſi colla caduta per le due AC, CX, dovendo eſſere nella ſudduplicata loro ragione, ſaranno tra eſſo loro, come la ſomma delle due AC, CR, alla ſola AC. Ma in queſta ſteſſa ragione ſono altresì il liquore ſcoſſo, ed il liquore contenuto nel cilindro, che ha per baſe il lume, e per altezza la AC. Dunque quelle velocità, e queſti liquori ſono nella ſteſſa ragione; e pertanto, ſe muovaſi il primo liquore colla ſeconda velocità, ed al contrario il ſecondo colla prima, avranno ambidue lo ſteſſo moto.

XVII.

Altre rifleſſioni intorno all'uſcita de' liquori, la di cui altezza è ſempre la ſteſſa.

148. INtorno all'uſcita de' liquori, che mantengonſi elevati ne'loro vaſi ſempre alla ſteſſa altezza reſtano a farſi altre rifleſſioni, nelle quali entra tuttavia la conſiderazione della cateratta, che formaſi dentro di eſſi. Ed in primo luogo di già l'eſperienza ſteſſa ci apprende, che ſi aſſottigli ſempre più quel cilindro di liquore, che eſce dal lume, quante volte continua a cadere liberamen-

te. Deriva questo suo assottigliamento dall'aumento, che riceve la sua velocità con quella sua libera caduta; onde si è, che debbano essere tanto più anguste le varie sezzioni orizontali, che in esso si fanno, quanto maggiormente ritrovasi aumentata in esse la velocità del liquore. Ma, siccome la curva, colla di cui rivoluzione formasi la cateratta dentro del vase, si estende all'infinito eziandio al di sotto del lume; così, quando cade liberamente il liquore, che esce dal lume, continua egli il suo moto per la porzione della cateratta, che colla rivoluzione della stessa curva rimane fuori del vase; onde si assottiglia a misura, che restringesi la capacità di quest'altra porzione.

149. Or da ciò, che il liquore uscito dal lume colla sua libera caduta dee assottigliarsi in modo, che ogni sua sezzione orizontale corrisponda reciprocamente alla sua velocità; egli è facile ad intendersi, come data l'altezza constante del liquore, e dato il lume, possa definirsi una delle sezzioni orizontali; e come al contrario data l'altezza constante del liquore, e data una delle sezzioni orizontali, possa determinarsi il lume. Ma, oltre a questi due problemi, possiamo risolverne ancora un'altro, e si è di definire l'altezza constante del liquore, essendo data così l'ampiezza del lume, come l'ampiezza di una delle sezzioni orizontali. In fatti queste due ampiezze debbono essere tra esso loro nella reciproca sudduplicata ragione dell'altezze, per cui acquistansi le loro velocità. Onde si ridurrà il problema a prolungare una data retta in modo, che tutta la retta prolungata sia al suo prolungamento in data ragione.

150. In secondo luogo niente vieta, che nell' aprirsi il lume fatto nel fondo del vase, si scuota tutto il liquore, che nello stesso vase si racchiude. Avviene ciò, quantevolte l'ampiezza del lume, e l'ampiezza del fondo sono eguali tra esso loro. Imperocchè in questo caso, siccome aperto il lume non rimane nel fondo parte veruna, che possa

possa sostenere il peso di qualche porzione del liquore; così dovrà scuotersi, e porsi in moto tutto il liquore, che si contiene nel vase. Ed in fatti, quando il lume, ed il fondo sono della stessa ampiezza; la cateratta, che formasi dentro del vase, non si eleva sul lume, ma s'interrompe immediatamente sopra di esso. Onde, siccome il liquore del vase rimane tutto racchiuso dentro della cateratta, che de additarci la copia del liquore, che si scuote; così per necessità lo scuotimento dovrà farsi in tutte le parti del liquore.

151. Quindi, attento quel tanto è stato avvertito di sopra, dovrà generarsi in tutte le parti del liquore col loro scuotimento una velocità constante, ed eguale a quella, che acquistasi colla caduta per la constante altezza del liquore. Onde, siccome questa stessa de aversi come velocità mezza, così la forza o sia moto del liquore scosso dovrà ripetersi, sì da questa velocità, come dall'intera copia del liquore, che si racchiude nel vase. Per poco poi, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che nel tempo della caduta per l'altezza constante del liquore debba tramandarsi dal lume il duplo del liquore contenuto nel vase. E qualora questo liquore nell'uscire dal lume cade liberamente, pure continuerà egli il suo moto per la porzione della cateratta, che rimane sotto dello stesso lume; onde eziandio si assottiglierà in modo, che ogni sua sezzione orizontale corrisponderà reciprocamente alla sua velocità.

152. In terzo luogo, sebbene dato il lume fatto nel fondo del vase, e data l'altezza constante del liquore, debba essere data ancora la copia del liquore, che esce da quel lume in un dato tempo; nientedimeno si è conosciuto coll'esperienza, che se al lume dato si applichi un tubo, per cui possa insinuarsi il liquore, che esce, non solo si aumenti quella copia di liquore, che scarica il lume in un tempo dato, ma che il suo aumento

abbia ancora un tale quale rapporto colla lunghezza stessa del tubo. Deriva ciò dal doversi riguardare quel tubo applicato al lume come una continuazione del vase, e dall'essere in conseguenza l'orificio esteriore dello stesso tubo il vero lume, da cui esce il liquore. Imperocchè, siccome per rapporto a quest'orificio l'altezza constante del liquore ritrovasi essere maggiore; così dovrà aumentarsi eziandio la velocità, con cui esce il liquore dallo stesso orificio, ed in conseguenza il vase in un dato tempo dovrà scaricarne copia maggiore.

153. Ma per giudicare, come si dee, di questo aumento, giova riflettere, che siccome il vero lume, per cui esce il liquore, si è l'orificio esteriore del tubo; così da questo orificio dee incominciare la cateratta, che formasi dentro del vase. E quantunque ella per rapporto al tubo s'interrompa immediatamente sullo stesso suo orificio; nientedimeno dentro del vase ripiglierà di nuovo il suo corso, e racchiuderà in se non solo il lume del vase, ma porzione ancora del suo fondo. Quindi, siccome dee porsi in moto tutto quel liquore del vase, che rimane racchiuso dentro di essa; così la porzione esteriore di questo liquore per ragion del fondo, con cui s'incontra, continuerà il suo moto orizontalmente. Onde, opponendosi all'altra porzione interiore, che s'incontra col lume, spingerà più in dentro alcune delle sue particelle, e renderà in conseguenza minore la vena del liquore, che passa per lo stesso lume.

154. Essendo così, chiaro si è, che sebbene per mezzo del tubo applicato al lume del vase debba farsi maggiore la quantità del liquore, che esce in un dato tempo dal suo orificio esteriore; nientedimeno questa maggior quantità non dee corrispondere in proporzione alla maggior velocità, con cui ella esce: per la ragione, che lo stesso tubo per un'altro verso fa restringere la vena del liquore, che passa per l'aperto lume del

vase.

vase. Ed egli è da notarsi, che restringesi un tantino questa vena, eziandio se non si applichi al lume del vase tubo veruno: il qual restringimento dovrà ripetersi, o dall'altezza del lume, la quale tuttoche piccola sarà, che il lume debba riguardarsi come un piccolo tubo applicato all'apertura della superficie interiore del vase; o pure da quella natural propensione, che ha il liquore di attaccarsi alla superficie di qualsisia corpo. Ma, attento questo restringimento, deesi aversi per vero lume, non già quello fatto nel vase, ma la sezzione della vena del liquore, che passa per quel lume.

155. Finalmente, sebbene il liquore debba uscire per lo lume fatto nel vase colla velocità, che acquistasi colla caduta per la constante altezza, a cui si mantiene elevato il liquore sullo stesso lume; nientedimeno, se il vase sia cinto di altro liquore della stessa specifica gravità, il quale per rapporto al suo lume ascenda ad altezza minore, uscirà il liquore per quel lume colla velocità, che si acquista colla caduta per la differenza delle due altezze. Imperocche, siccome in questo caso comunicano tra esso loro i due liquori per mezzo del lume; così, se del primo liquore prendasi una porzione, che sia della stessa altezza col secondo, ella sarà in equilibrio con questo secondo liquore. Onde, dovendosi ripetere l'uscita del primo liquore dal solo peso della sua rimanente porzione, per necessità dovrà egli uscire colla velocità, che acquistasi colla caduta per l'altezza di quest'altra porzione, che è la differenza tra le due, a cui elevansi i due liquori per rapporto al lume.

156. Egli è facile poi ad intendersi, quale debba essere l'altezza, per cui acquistasi la velocità, colla quale esce il liquore per lo lume, se mai il vase sia cinto di un'altro liquore, che abbia per rapporto al primo diversa specifica gravità. Onde, senz'arrestarci di vantaggio in questa ricerca, noteremo più tosto, che siccome il liquore racchiuso nel vase si pone in moto nell'altezza, in cui terminasi

 l'equi-

l'equilibrio; così a queſta ſteſſa altezza dovrà riportarſi il lume fatto nel fondo del vaſe, da cui in conſeguenza incomincerà la cateratta, che formaſi dentro dello ſteſſo vaſe. Ma ſebbene queſta cateratta per l'indole della curva ſua generatrice ſi continui eziandio al di ſotto di quell'altezza; nientedimeno la porzione inferiore di eſſa non è baſtante a ricevere quella copia di liquore, che viene giù per l'altra ſuperiore; poichè per la reſiſtenza, che ella incontra nell'altro liquore quieſcente, non può continuare il ſuo moto colla ſolita legge dell'accelerazione de' gravi; onde la porzione inferiore della cateratta, adattata a quella legge non ha baſtante capacità per riceverla.

XVIII.

Dell'effuſione del ſolo liquore, di cui i vaſi ſi riempieno.

157. QUantunque, in trattare dell'effuſione de' liquori per lumi fatti ne' loro vaſi, ſiaſi ſuppoſto, che il liquore reſti elevato ſu'l lume ſempre alla ſteſſa altezza; nientedimeno cogli ſteſſi principj poſſiamo porre a calcolo eziandio il caſo, quando uſcendo dal vaſe il ſolo liquore, di cui ritrovaſi pieno, la ſua altezza ſu'l lume continuamente ſi minora. In fatti, ſebbene, con minorarſi l'altezza del liquore per rapporto al lume, debba minorarſi altresì la ſua velocità; tutta volta, ſe intendiamo diviſo il tempo in particelle infinitamente piccole, non v'ha dubbio, che ancora la diminuzione, che ſoffre la velocità in ciaſcuna di eſſe, ſia di una picciolezza infinita. Onde, non oſtante, che la totale effuſione del liquore facciaſi con moto ritardato; pure però la porzione, che di eſſo tramandaſi in una di quelle particelle di tempo, uſcirà dal lume con moto eguabile, ed uniforme.

Fig. 5. 158. Ciò avvertito, fingiamo ora, che la AB ſia la totale altezza del liquore ſu'l lume, intorno a cui come aſſe deſcrivaſi la parabola AE. Concepiſcaſi

cepiscasi diviso il tempo in particelle infinitamente piccole; e si abbassi il liquore per fino a C durante la prima di esse, e poi fino a D durante la seconda. In questi due abbassamenti adunque l'effusione del liquore si farà colle velocità, che si acquistano colla caduta per le due altezze AB, AC; onde le medesime velocità saranno tra esso loro nella sudduplicata ragione di quest' altezze. Ma per la natura della parabola in questa stessa sudduplicata ragione sono altresì l'ordinate corrispondenti BE, CF. Dunque la velocità, con cui esce il liquore nel primo abbassamento, sarà alla velocità, con cui esce nel secondo, come BE a CF; e per tanto, disegnandosi colla BE la prima velocità, dovrà esprimersi colla CF la seconda.

159. Tirisi in'oltre nella parabola la terza ordinata DG; e se facciasi parallela al suo asse tanto la FH, quanto la GI, sarà così la differenza tra li quadrati delle due ordinate BE, CF eguale al duplo rettangolo delle due BE, EH, come la differenza tra li quadrati dell'altre due ordinate CF, DG eguale al duplo rettangolo dell' altre due CF, FI. Ma, per essere i quadrati dell'ordinate DE, CF, DG, come le ascisse corrispondenti AB, AC, AD, le due riferite differenze sono nella stessa ragione colle due BC, CD. Dunque BC sarà a CD, come il rettangolo delle due BE, EH al rettangolo dell'altre due CF, FI, o pure in ragion composta di BE a CF, e di EH ad FI. Onde si vede, che gli abbassamenti del liquore fatti in tempi infinitamente piccoli debbano essere tra esso loro in ragion composta delle velocità, con cui esce il liquore in quegli abbassamenti, e delle diminuzioni, che soffrono in quello mentre le stesse velocità.

160. Or per mezzo di questo teorema, se mai sia nota la figura del vase, in cui stà racchiuso il liquore, niente sarà più facile, quanto di definire la legge, con cui minorasi la velocità del liquore nella sua effusione. Fingiamo perciò, che il vase sia prismatico, ovvero cilindrico. E sic-

come, per avere i due abbassamenti BC, CD, debbono uscire dal vase i due piccoli strati di liquore, che ad essi corrispondono; così, uscendo questi strati per un' istesso lume, saranno i medesimi in ragion composta delle velocità BE, CF, con cui escono, e de' piccoli tempi, che impieganst nella loro uscita. Ma, attenta la figura del vase, gli stessi piccoli strati, sono come gli abbassamenti BC, CD, ed in conseguenza in ragion composta delle velocità BE, CF, e delle loro diminuzioni EH, FI. Dunque i piccoli tempi, e le diminuzioni delle velocità saranno tra esso loro nella stessa ragione; e pertanto si diminuirà la velocità in ragion del tempo, e l'effusione del liquore si farà con moto eguabilmente ritardato.

161. Quindi, se del liquore prendansi due porzioni, che si terminino al fondo del vase; i tempi delle totali loro effusioni saranno, come le velocità, con cui incominciano ad uscire dal vase le due porzioni prese. E poichè, essendo eguali tanto i fondi, quanto i lumi di due di questi vasi, niente vieta di riguardare uno di essi come porzione dell'altro; perciò, se il liquore sia elevato in questi vasi a diverse altezze, ancora i tempi delle totali effusioni saranno, come le velocità, con cui incomincia ad uscire il liquore per gli due lumi. Conforme poi, con aumentarsi il fondo di uno dei due vasi, dee aumentarsi a proporzione ancora il tempo della totale effusione del suo liquore; così, se mai vogliasi aumentare il lume di uno di essi, si dovrà al contrario diminuire il tempo a proporzione. Onde i tempi delle totali effusioni de' liquori racchiusi in due vasi prismatici, ovvero cilindrici saranno generalmente tra esso loro in ragion composta della diretta delle velocità iniziali, della diretta ancora de' fondi, e della reciproca de' lumi.

162. Da questo general teorema intanto, secondo il nostro stile, possiamo dedurne come corollarj molti altri speciali; ma senza trattenerci inutilmente nell'enumerazione di essi, facciamo più co-

tosto vedere, come data la capacità di uno di questi vasi, e data altresì così l'altezza del liquore, come l'ampiezza del lume, che fingiamo esser circolare, possa definirsi il tempo, di cui si ha bisogno per la totale effusione del liquore, che si racchiude nel vase. Ed in vero, di già è stato dimostrato, che mantenendosi il vase constantemente pieno di liquore, debba egli nel tempo della caduta per la sua altezza scaricare tanto liquore, quanto ne contiene il duplo del cilindro, che avendo per base il lume elevasi col liquore alla stessa altezza. Dunque una qualvolta nell' effusione del solo liquore, di cui si riempie il vase, minorasi la velocità in ragion del tempo, dovrà uscire dal vase nel tempo di quella caduta tanto liquore, quanto ne racchiude il solo riferito cilindro.

163. Definiscasi adunque, così il tempo della caduta per l'altezza del liquore contenuto nel vase, come la capacità del cilindro, che avendo per base il lume, elevasi col liquore alla stessa altezza; e se facciasi, come la capacità di questo cilindro alla capacità del vase, così il tempo definito ad un'altro tempo, chiaro si è, che con esso si avrà il tempo ricercato. Se poi si consideri, che il cilindro, ed il vase abbiano la stessa altezza, s'intenderà facilmente, che il tempo definito debba essere al tempo ricercato, come l'ampiezza del lume all'ampiezza del fondo. Onde, se facciasi come la prima di queste due ampiezze alla seconda, così il tempo definito ad un' altro tempo; ancora con quest'altro avremo il tempo, che si dimanda. Anzi potremo averlo parimente, se determinato il tempo, in cui mantenendosi il vase constantemente pieno di liquore, ne scarichi quella copia, che in esso si racchiude, prendasi il duplo di questo tempo.

164. Del rimanente, se potesse aversi un vase, che con scaricare il liquore, di cui si riempie, permettesse allo stesso liquore di deprimersi dentro di esso egualmente in tempi eguali; non v'ha

dub-

dubbio, che coll' effusione del suo liquore si avrebbe un'esatta misura del tempo. Per esaminare intanto qual dovrebbe essere la sua figura, fingiamo, che ella si abbia colla rivoluzione della curva AE intorno al suo asse AB. Si tirino in questa curva le tre ordinate BE, CF, DG, che siano infinitamente vicine tra essoloro, ed in egual distanza l'una dall'altra, cosicchè le due BC, CD siano tra loro eguali. E poichè si vuole, che il liquore dentro del vase si abbassi egualmente in tempi eguali; dovranno essere eguali i tempi, in cui escono dal vase i due piccoli strati di liquore, che corrispondono alle due BC, CD; e perciò questi stessi piccoli strati saranno nella stessa ragione colle velocità, con cui escono.

Fig. 5.

165. Or, attenta la generazione del vase, chiaro si è, che i piccoli strati di liquore corrispondenti alle due BC, CD possono riguardarsi, come due piccoli cilindri egualmeute alti. Onde, essendo le ordinate BE, CF i raggi delle loro basi, sarà il primo di essi al secondo, come il quadrato della BE al quadrato della CF. Ma supposto, che il lume siasi fatto nel punto A, che è il vertice della curva, escono gli stessi piccoli strati per questo lume colle velocità, che si acquistano colla caduta per l'altezze AB, AC. Dunque, essendo queste velocità nella sudduplicata ragione delle stesse altezze, saranno i quadrati delle due ordinate BE, CF nella sudduplicata ragione dell'ascisse corrispondenti AB, AC. E poichè la stessa dimostrazione ha luogo da pertutto, perciò si genererà il vase colla rivoluzione di una curva, in cui i quadrati dell'ordinate sono tra essoloro; non già nella semplice ragione dell' ascisse corrispondenti, come nella parabola, ma nella loro ragione sudduplicata.

Del

XXV

Del moto dell' acque correnti, e primieramente della forza, da cui egli deriva.

166. PAsseremo ora a ragionare del moto dell' acque correnti, siccome è quello de' fiumi, i quali portansi per canali fatti nella superficie stessa della terra. Ed in primo luogo egli è da notarsi, che siccome questi canali chiamansi alvei, così la parte loro più bassa dicesi fondo, e l'altre due laterali si appellano ripe, ovvero sponde. L'alveo intanto dell' acque correnti talvolta formasi dalla natura, e talvolta ancora dall'arte; ma conforme l'alveo naturale per lo più è di figura talmente irregolare, che non è egli così facile di porla a calcolo, così al contrario l'artificiale construiscesi in forma di parallelepipedo rettangolo: del quale alveo si fa uso propriamente, quantevolte da un qualche fiume derivasi porzione delle sue acque, sia per construire fonti, sia per irrigare terreni, sia finalmente per muovere ruote di molini, cartiere, ferriere, e di altre cose simili.

167. Quantunque non sia nostro pensiero di esaminare minutamente tutto ciò, che si appartiene al corso de' fiumi; stimiamo tuttavolta ben fatto di dirne tanto, quanto basta per proseguirne più oltre le ricerche. Perciò noteremo in oltre, che siccome gli alvei de' fiumi sono sempre naturali, così formansi dalla natura le loro sponde, o con iscavare il terreno, per cui corrono l'acque, o con alzare le parti laterali al corso di esse colle deposizioni del limo; onde si è, che le prime diconsi fatte per iscavazione, e le seconde per alluvione. E poichè, così l'une come l'altre non sono sempre bastanti per trattenere l'acque nella maggiore loro escrescenza; perciò conviene talvolta elevarle a maggior'altezza, con ammassarvi artificialmente altra terra, alle quali elevazioni artificiali suol darsi il nome di argini, per dover resistere allo sforzo, che esercitano contro di esse l'acque correnti. 168.

168. Per quanto al fondo dell'alveo di un fiume, egli non sempre formasi dalla natura in modo, che tramandi tutte l'acque, che insistono su di esso; e perciò siccome chiamasi fondo vivo quello, che interamente le tramanda, così al contrario si appella fondo morto quello, che ne arresta porzione. Comunque però siasi l'alveo, sempre dentro di esso potrà distinguersi una superficie, su di cui incominciano l'acque a correre liberamente; onde questa superficie propriamente dovrà aversi, come il vero, e vivo fondo dell'alveo. Per la resistenza poi, che incontrano l'acque nelle sponde dell'alveo, chiaro si è, che con accostarsi l' acque alle sponde debba minorarsi la loro velocità. Onde, siccome la porzione di esse più veloce comunemente chiamasi filone, così potrà distinguersi il luogo del filone per mezzo de' corpi, che galleggiano nell'acque, come quelli, che a lungo corso debbono portarsi laddove l'acque corrono con maggior velocità.

169. Avvertite tali cose, per venire ora più d'appresso al proposto argomento, dimostreremo primieramente, donde derivi il moto dell'acque correnti. Credesi comunemente, che egli debba ripetersi da una declività, che abbia il fondo dell'alveo, per cui corrono; ma egli è facile ad intendersi, che l' acque debbano correre eziandio per un'alveo, il di cui fondo sia orizontale. Fingiamo perciò, che un alveo di questa indole abbia nel suo principio una gran vasca continuamente piena di acque, e che questa vasca comunichi coll'alveo per un lume proporzionato alla sua ampiezza. Aperto adunque questo lume, usciranno l'acque dalla vasca, ed immediatamente s'insinueranno nell'alveo con cui la vasca comunica. Onde, siccome incominciano per esso a correre con quella stessa velocità, con cui escono; così, non ritrovandosi nell'alveo ostacolo veruno, che possa arrestarle, per necessità dovranno continuare il loro corso per tutta la sua lunghezza.

170.

170. Ed in vero, conforme i gran fiumi, che veggiamo nella superficie di questa nostra terra, formansi coll'unione di altri fiumi più piccoli; così per la formazione di quest'altri, primieramente le loro acque debbonsi raccogliere in una qualche vasca, ed indi insinuarsi da questa vasca nell'alveo, per cui corrono. Onde, sebbene sia orizontale il fondo dell'alveo, in cui s'insinuano; pure potrà continuarsi per esso il loro corso con quella stessa velocità, con cui escono dalla vasca. Aggiungasi, che se nel fondo dell'alveo si richiedesse qualche declività, per poter correre l'acque dentro di esso; dovrebbe aumentarsi continuamente la loro velocità, siccome aumentasi quella di un grave, che portasi per un piano inclinato: quandocche ne' fiumi, che hanno un corso placido, e regolare, ivi solamente vedesi aumentata la loro velocità, ove gli alvei si restringono; siccome al contrario ivi solamente vedesi diminuita; ove gli stessi alvei si slargano.

171. Or quantunque possano correre l'acque eziandio per un'alveo, il di cui fondo sia orizontale; nientedimeno non dobbiamo darci a credere, che di questa indole siano da per tutto gli alvei de' fiumi, che corrono placidamente. Imperocche, secondo si dirà da quì a poco, conforme il fondo di essi dee essere più sollevato, ove slargandosi l'alveo, si diminuisce la velocità dell'acque; così al contrario dovrà essere più depresso, ove restringendosi lo stesso alveo, la velocità dell'acque si minora. Solamente dee tenersi per indubitato, che i fondi de' loro alvei non possono essere da per tutto declivi, per la ragione, che si aumenterebbe la velocità dell'acque in modo, che non si potrebbero affatto traversare. E per quanto alla velocità, che perdono l'acque per le continue resistenze, che incontrano; ella si riacquista per una forza, che in esse risiede, sempre pronta al loro bisogno.

172. Perciò convien riflettere, che siccome l'acque incominciano a correre nell'alveo con quel-

la

la velocità, colla quale escono dalla vasca, in cui si riuniscono; così riacquistano la velocità, che perdono per le continue resistenze, che incontrano, in virtù del proprio loro peso. Ma per ischiarire di vantaggio questi due punti, intendansi divise l'acque, che si riuniscono nella vasca, in strati orizontali, che siano di un' altezza infinitamente piccola; e suppongasi ancora, che il fondo della vasca, ed il fondo orizontale dell'alveo siano in un medesimo piano. Qualora adunque, aperto il lume della vasca, insinuansi nell'alveo que' piccoli strati, usciranno i medesimi colle velocità, che acquistansi colla caduta per l' altezze, a cui elevansi l'acque nella vasca sugli stessi strati; onde con queste stesse velocità incominceranno altresì a correre nel loro alveo.

173. Da ciò intanto possiamo dedurne due conseguenze. La prima si è, che sebbene le minime particelle di un' istesso strato debbano correre nell'alveo con egual velocità; nientedimeno il corso di quelle, che rapportansi a strati diversi, debba farsi con velocità eziandio diverse. L' altra si è, che le velocità con cui corrono le particelle di due diversi strati, debbano essere tra essoloro nella sudduplicata ragione dell'altezze, a cui la suprema superficie dell'acque della vasca elevasi sugli stessi strati. Ed egli è da notarsi, che queste due leggi delle loro velocità debbono aver luogo eziandio, se i piccoli strati orizontali s'inoltrino in una parte dell' alveo, in cui il fondo sia inclinato all' orizonte; poichè, sebbene si aumenti la velocità di ciascuno di essi, pure però le velocità aumentate saranno eguali nelle particelle di un'istesso strato, e serberanno la stessa ragione in quelle, che si riferiscono a' strati diversi.

174. Quantunque poi portandosi per l' alveo i riferiti piccoli strati colle divisate velocità, non possano i superiori col loro peso agire sugli altri inferiori; nientedimeno se mai avenga, che questi strati inferiori si ritardino per la resistenza, che incontrano nel di lui fondo, risentiranno senza

du-

dubio l'azione, che esercitano gli altri superiori in virtù del loro peso; onde si accelereranno di nuovo fino a che riacquistino interamente la velocità perduta; ed ecco, che le minime particelle di tutti gli strati sempre avranno que' gradi di velocità, che sono ad essi necessarj, per continuare il loro corso nell' alveo. Del rimanente si vedrà da quì a poco quel tanto deve avvenire all'acque correnti, quantevolte gli strati inferiori di esse impiegano porzione della loro velocità per superare le resistenze, che incontrano nel fondo dell'alveo, per cui corrono.

XVI

Del modo di definire la velocità mezza dell'acque correnti in ciascuna sezzione del loro alveo.

175. INdagata la causa del continuato moto dell' acque correnti, faremo vedere presentemente, come possa definirsi la velocità mezza dell' acque, che passano per una data sezzione dell' alveo. Ed in vero chiamasi con questo nome la sezzione, che intendesi fatta nell' alveo per mezzo di un piano perpendicolare al suo fondo, e direttamente opposto al corso dell'acque: la qual sezzione in conseguenza dovrà terminarsi lateralmente dalle sponde dell'alveo, al di sotto dal suo fondo, ed al di sopra dalla superficie suprema dell'acque. Ma, conforme a guisa dell'alveo può ella essere, talvolta naturale, e talvolta artificiale; così il divario tra queste due specie di sezzione consiste in ciò, che la prima per lo più è di una figura talmente irregolare, che non è egli così facile di porla a calcolo con esattezza, laddove la seconda, come fatta in un parallelepipedo rettangolo, ha la forma di parallelogrammo ancora rettangolo.

176. Si consideri ora nell'alveo una di queste sezzioni, ed intendansi divisi in piccoli strati paralleli alla sua base tutte l'acque, che passano per essa. Per quel tanto adunque è stato dimostrato, le

le minime particelle di un medeſimo ſtrato eſcono per la ſezzione colla ſteſſa velocità; quelle poi, che rapportanſi a ſtrati diverſi, uſciranno per la medeſima con velocità ancora diverſe. E ſe la ſuprema ſuperficie, che ritrovanſi avere l'acque correnti in quella vaſca, che le somminiſtra all' alveo, ſi prolunghi orizontalmente fino al luogo della ſezzione; con eſſa reſteranno determinate l'altezze, per cui acquiſtanſi cadendo le diverſe velocità degli ſteſſi ſtrati. Onde dobbiamo preſentemente far vedere, come poſſa determinarſi, così la poſizione di quella ſuprema ſuperficie nel luogo della ſezzione, come l'altezza, per cui ſi acquiſta cadendo la velocità mezza dell'acque, che paſſano per la ſteſſa ſezzione.

177. Per incominciare dalla poſizione, che ritrovaſi avere la riferita ſuprema ſuperficie nel luogo della ſezzione, può ella definirſi, con miſurare eſattamente lo ſpazio, che in un dato tempo, come in quello di un minuto, o ſia di 60 ſeconde percorre un galleggiante preſſo quel luogo. Imperocche, muovendoſi queſto galleggiante colla velocità dell'acque, che paſſano per lo ſupremo termine della ſezzione; ſi percorrerà quello ſpazio con queſta ſteſſa velocità. Ma gli ſpazj percorſi con una medeſima velocità debbono eſſere, come i tempi. Dunque, ſempre quando è noto lo ſpazio, che nel tempo di 60 ſeconde ſi percorre colla velocità dell'acque, che nel luogo della ſezzione ſono nella ſuprema ſuperficie; ſi saprà altresì, quanto debba eſſere lo ſpazio, che nel tempo di una ſola ſeconda ſi percorre colla ſteſſa velocità.

178. In' oltre conforme un grave cadendo portaſi nel tempo di una ſeconda per un' altezza di quindeci piedi con una dodiceſima parte di più; così colla velocità acquiſtata per queſt'altezza dee percorrerſi il duplo di eſſa nel medeſimo tempo di una ſeconda. Ma gli ſpazj percorſi in egual tempo con velocità diſuguali debbono eſſere colle velocità nella ſteſſa ragione. Dunque, eſſendo noti gli ſpazj, che nel tempo di una ſeconda ſi percorrono

corrono colla velocità, che acquistasi cadendo per un'altezza di quindeci piedi con una dodicesima parte di più, e con quella dell'acque, che nel luogo della sezzione ritrovansi nella suprema superficie; neppure ignoreremo la ragione, che serbano tra esso loro queste due velocità.

179. Finalmente, siccome le velocità, che acquistansi colla caduta per due diverse altezze, sono nella sudduplicata loro ragione; così al contrario le altezze saranno nella duplicata ragione delle velocità. Ma di già è nota la ragione tra la velocità, che acquistasi colla caduta per un'altezza di quindeci piedi con una dodicesima parte di più, e la velocità dell'acque, che nel luogo della sezzione ritrovansi nella suprema superficie. Dunque potrà determinarsi altresì l'altezza, per cui cadendo acquistasi questa seconda velocità. Onde, se all'altezza della sezzione aggiungasi quest'altra altezza, col termine di essa avremo il punto, per cui dovrà passare la suprema superficie, che ritrovansi avere l'acque correnti nella loro vasca, quantevolte prolungasi orizzontalmente persino al luogo della sezzione.

180. Per quanto poi all'altezza, per cui cadendo acquistasi la velocità mezza dell'acque, che passano per la sezzione; si determinerà ella nel modo, che segue, almeno nella supposizione di esser la sezzione un parallelogrammo rettangolo. Sia ABCD la sezzione fatta nell'alveo, e nell'altezza di essa AB sia E il punto, per cui passa la suprema superficie dell'acque della vasca prolungata orizzontalmente. Descrivasi intorno alla EB come asse la parabola EFG. E poichè la velocità, con cui escono l'acque per la piccola apertura della sezzione NOON, acquistasi colla caduta per la EN; chiaro si è, che ella debba essere, come l'ordinata della parabola NM, che corrisponde alla stessa EN. Ma la copia d'acque, che passano in un dato tempo per la stessa piccola apertura, dee ripetersi così dall'apertura, come dalla velocità. Dunque corrisponderà quella copia d'acque in

Fig. 6.

in proporzione al rettangolo delle due NO, NM, o pure al piccolo trapezio MNOR.

181. Quindi, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, si farà proporzionale all'intero spazio parabolico AFGB la copia d'acque, che nello stesso dato tempo passano per l'intera sezzione ABCD. Ma, supposto, che EH sia l'altezza, per cui acquistasi cadendo la velocità mezza dell'acque, e che HI sia l'ordinata della parabola corrispondente alla EH; la stessa copia d'acque per una ragion consimile dee corrispondere in proporzione al rettangolo delle due AB, HI. Dunque questo rettangolo, e quello spazio parabolico saranno eguali tra esso loro; e pertanto si determinerà l'altezza ricercata EH, primieramente con tagliare dalla EB la porzione BL, che sia alla EA nella sudduplicata ragione delle due EA, EB; ed indi con fare, che la EH sia alla EB nella duplicata ragione di quella che ha il duplo della EL al triplo della AB.

182. Del rimanente la supposizione, di essere la sezzione dell'alveo un parallelogrammo rettangolo, può riceversi ancora ne' fiumi, i di cui alvei sono quasi sempre irregolari. Imperocchè, secondo è stato avvertito di sopra, le loro acque per le continue resistenze, che incontrano nelle sponde, non si portano presso di esse con quella stessa velocità, con cui corrono nel mezzo, ovvero nel filone. Onde, siccome bisogna restringere la sezzione verso le sponde, per conseguire, che le acque nelle loro vicinanze muovansi colla stessa velocità, che ritrovansi avere l'acque del filone; così questo restringimento potrà farsi in modo, che la sezzione prenda la forma di parallelogrammo rettangolo. Ed in fatti, se in luogo della vera sezzione sostituiscasi un rettangolo, che abbia con essa la stessa base, e la stessa altezza; si farà ella ristretta presso a poco in quel modo, che si desidera.

Dell'

XVII

Dell' affezioni, che si considerano nell'acque correnti per ragion delle sezzioni del loro alveo.

183. ESamineremo ora le affezioni, che considerar si debbono nel moto dell' acque correnti, con incominciare da quelle, che riguardano le sezzioni fatte nell'alveo, per cui corrono. Ed in primo luogo faremo vedere, come debbansi paragonare tra esso loro le quantità dell'acque, che passano per due diverse sezzioni fatte nell'alveo. Perciò convien riflettere, che siccome può aversi la velocità mezza, che ragguagli insieme le diverse velocità, con cui escono per una stessa sezzione i varj strati dell' acque; così, potendosi riguardare ciascuna delle due sezzioni come un lume, che tramandi l'acque con quella velocità mezza, dovranno ripetersi le quantità d'acque, che passano per due diverse sezzioni; da tre fonti, cioè dalle loro velocità mezze, dall' ampiezze delle stesse sezzioni, e dai tempi, che impieganfi nel loro passaggio. Onde le riferite quantità saranno generalmente tra esso loro in ragion composta delle velocità mezze, delle sezzioni, e de' tempi.

184. Da questo general teorema intanto possiamo dedurne, come corollarj, molti altri speciali. Ed in fatti per mezzo di esso conforme vedesi primieramente, che le riferite quantità debbano essere in ragion composta delle velocità mezze, e delle sezzioni, essendo eguali i tempi; delle velocità mezze, e de' tempi, essendo eguali le sezzioni; ed in fine delle sezzioni, e de' tempi, essendo eguali le velocità mezze; così vedesi inoltre, che le stesse quantità debbano essere nella semplice ragione delle velocità mezze, se siano eguali tanto le sezzioni, quanto i tempi; nella semplice ragione delle sezzioni, se siano eguali così i tempi, come le velocità mezze; ed in fi-

ne nella ſemplice ragione de' tempi, eſſendo eguali tanto le velocità mezze, quanto le ſezzioni.

185. Ma oltre a queſti teoremi ſpeciali poſſiamo ancora dedurne altri intorno all'eguaglianza delle quantità d'acque, che ſcaricano due diverſe ſezzioni fatte nell'alveo: ſiccome in effetto le riferite quantità debbono eſſere eguali, primieramente ſe inſieme coi tempi ſiano eguali, così le velocità mezze, come le ſezzioni; in ſecondo luogo, ſe eſſendo eguali i tempi, le velocità mezze ſiano nella reciproca ragione delle ſezzioni; in terzo luogo, ſe eſſendo eguali le ſezzioni, le velocità mezze ſiano nella reciproca ragione de' tempi; in quarto luogo, ſe eſſendo eguali le velocità mezze, la ragione delle ſezzioni ſia reciproca di quella de' tempi; ed in fine, ſe i tempi ſiano in ragion compoſta della reciproca delle velocità mezze, e della reciproca ancora delle ſezzioni.

186. Or conforme, con far uſo della velocità mezza, poſſiamo paragonare tra eſſo loro le quantità d'acque, che ſcaricano due diverſe ſezzioni in tempi ancora diverſi; così con ricorrere all' altezza, per cui cadendo acquiſtaſi quella velocità, potremo definire la quantità d'acque, che paſſa per la ſezzione in qualſiſia tempo dato. Si determini perciò il tempo della caduta per quell' altezza; e per poco, che ſi voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che in quello ſteſſo tempo debba paſſare per la ſezzione tanta copia d'acque, quanta ne addita il duplo del priſma, che ha per baſe la ſezzione, e per altezza quella ſteſſa della velocità mezza. Ma le quantità d'acque, che paſſano per una medeſima ſezzione in tempi diverſi, debbono eſſere come i tempi. Dunque, ſe facciaſi, come il tempo determinato al tempo dato, così il riferito priſma ad un'altro priſma; ſi avrà col duplo di queſt'altro priſma la copia d'acque, che ſi dimanda.

187. In ſecondo luogo, ſe l'acque per l' alveo corrano in modo, che la ſuprema loro ſuperficie,

ſen-

ſenza elevarſi, o abbaſſarſi in qualche parte ſia da per tutto piana, ed eguale; non v'ha dubbio, che per qualſiſia ſezzione fatta nell'alveo debba paſſare in un dato tempo una data copia d'acque. Imperocchè, ſiccome paſſandone maggior copia per una ſezzione ſuperiore, che per un' altra inferiore, la ſuprema ſuperficie dovrebbe elevarſi tra queſte due ſezzioni; così al contrario dovrebbe ella abbaſſarſi, ſe per la ſuperiore ne paſſaſſe minor copia, che per l'altra inferiore. Da ciò intanto ricavaſi, che le ſezzioni fatte nell'alveo ſiano tra eſſo loro nella reciproca ragione delle loro velocità mezze. Onde ſiccome, eſſendo eguali le ſezzioni, le loro velocità mezze debbono eſſere eziandio eguali; così, facendoſi una ſezzione maggiore, o minore, ſi dovrà al contrario diminuire, o aumentare a proporzione la ſua velocità mezza.

188. Quindi per l'acque, che corrono colla diviſata legge, poſſono ſtabilirſi due teoremi. Il primo ſi è, che ove l'alveo ſi reſtringe, ivi il fondo debba eſſere più baſſo. In fatti, ſe queſta porzione di fondo foſſe allo ſteſſo livello dell' altre, le ſezzioni corriſpondenti avrebbero la ſteſſa velocità mezza dell'altre ſezzioni. Ma per eſſer queſte ſezzioni di minor ampiezza, dee aumentarſi in eſſe la velocità mezza. Dunque, perchè poſſa averſi queſt' aumento, per neceſſità il fondo dee eſſere più baſſo, laddove l'alveo ſi reſtringe. Quantunque poi, con abbaſſarſi il fondo, ſi aumenti altresì l'ampiezza delle ſteſſe ſezzioni; niente però vieta, che l'abbaſſamento ſiaſi fatto in modo, che tutta via le ſezzioni reſtino minori, e corriſpondano reciprocamente alle loro velocità mezze di già aumentate.

189. L'altro teorema ſi è, che ove l'alveo ſi slarga, ivi il fondo debba eſſere più ſollevato. Imperocchè, ſe queſta porzione di fondo foſſe allo ſteſſo livello dell'altre, le ſezzioni corriſpondenti avrebbero la ſteſſa velocità mezza dell'altre ſezzioni. Ma per eſſere queſte ſezzioni di maggior'ampiezza, dee diminuirſi in eſſe la velocità mezza.

Dunque, perchè possa aversi questa diminuzione, per necessità il fondo dee essere più sollevato laddove l'alveo si slarga. E quì ancora bisogna avvertire, che sebbene con sollevarsi il fondo, si minori altresì l'ampiezza delle stesse sezzioni; niente però vieta, che l'innalzamento siasi fatto in modo, che tuttavia le sezzioni restino maggiori, e corrispondano reciprocamente alle loro velocità mezze di già diminuite.

190. Finalmente, siccome avviene talvolta, che l'acque in un qualche luogo dell'alveo s'innalzino sulla suprema loro superficie; così dee ripetersi questo loro innalzamento dal non ritrovarsi nelle sezzioni di quel luogo tanta velocità mezza, di quanta si ha bisogno per dar passaggio in egual tempo a quella stessa copia d'acque, che tramandasi dalle sezzioni superiori. In fatti nel mentre, che passa per quelle sezzioni una porzione della riferita copia d'acque, eziandio la porzione rimanente si sforzerà di continuare il suo moto per la parte meno impedita. Onde, innalzandosi sulla suprema superficie della prima porzione a guisa di un corpo, che sale per un piano inclinato, continuerà il suo moto su di quella stessa superficie.

191. Due intanto possono essere le cagioni, per cui non si ritrovi nelle riferite sezzioni quella velocità mezza, che si richiede, per potersi tramandare per esse in egual tempo quella stessa copia d' acque, che passa per l'altre sezzioni superiori. La prima si è, perchè forse nel luogo di quelle sezzioni siasi abbassato il fondo meno del dovere; e l'altra perchè forse colle resistenze, che incontrano l'acque nello stesso fondo, siasi diminuita la loro velocità mezza. Conforme poi per lo contrario, con essersi abbassato il fondo più del dovere, dee aumentarsi nelle sezzioni corrispondenti la velocità mezza, ed abbassarsi in conseguenza la suprema superficie dell'acque, che passano per dette sezzioni; così, se mai l'aumento della velocità mezza s'impieghi dall'acque in superare le resistenze, che incontrano in quello stesso fondo, in tal caso

nè

nè si abbasserà, nè s' innalzerà la suprema loro superficie.

XVIII

Dell' altre affezioni, che debbono considerarsi nel moto dell'acque correnti.

192. SEguono l'altre affezioni, che debbonsi considerare, e porre a calcolo nel moto dell' acque correnti. Ed in primo luogo, conforme il moto dell' acque dee farsi a seconda dell' alveo, per cui si portano; così, se mai avvenga, che questo pieghi in un qualche luogo, ancora l'acque cambieranno la loro direzione, col quale cambiamento si diminuirà altresì la loro velocità. In fatti, qualunque sia la piegatura dell' alveo, sempre una delle due sponde si porrà in situazione di resistere in qualche modo al moto dell' acqua. Ma la velocità delle stesse acque si può ancora sempre risolvere in due altre velocità, di cui una agisca con direzione perpendicolare, e l'altra con direzione paralella alla nuova sponda. Dunque, siccome la prima di queste due velocità impiegasi dall'acque in percuotere la riferita novella sponda; così si continuerà il loro moto colla sola seconda velocità, e colla direzione, che ad essa si appartiene.

193. Quindi per rapporto alla piegatura dell' alveo possono stabilirsi i due seguenti teoremi. I, che la velocità totale dell' acque sia a quella loro porzione, con cui percuotono la novella sponda, come il raggio al seno primo dell' angolo, in cui si piega l'alveo. E II, che la velocità totale dell'acque sia a quell'altra loro porzione, con cui continuano il loro moto, come il raggio al seno secondo dello stesso angolo. Ma, siccome da questi due teoremi ricavasi, che essendo retto l'angolo, in cui piegasi l'alveo, impieghino l'acque tutta la loro velocità in percuotere la novella sponda, ed in conseguenza, che non rimanga in esse velocità alcuna per continuare il loro moto; così

 pos-

possiamo ancora dedurne, che se mai l'angolo della piegatura sia talmente ottuso, che differisca dalla somma di due retti per un'acuto infinitamente piccolo, sia nulla la velocità, con cui percuotono l'acque la novella sponda, ed in conseguenza che continuino il loro moto colla totale loro velocità.

194. Or se mai l'alveo nel piegarsi s'incurvi in modo, che la primitiva sponda facciasi tangente della sua curvatura; non v'ha dubbio, che l'angolo della piegatura sia maggiore di qualsisia angolo ottuso. Onde in questo caso, sebbene l'acque portandosi per l'alveo curvo mutino la loro direzione, nientedimeno continuano il loro moto coll'intera loro velocità. Ed in fatti in questa guisa, e non altrimente veggonsi piegati dalla natura gli alvei de' fiumi; poichè, siccome la nuova sponda per l'angolo della piegatura opponevasi al moto dell' acque, così colle replicate loro percosse tratto tratto si è diminuita di quel terreno, da cui derivava la sua resistenza. Anzi una cosa consimile vedesi praticata ancora dalla natura laddove il fondo dell'alveo ritrovasi più depresso, per essersi egli abbassato in modo, che sia cava, così la sua discesa, come l'opposta sua salita; onde si è, che l'acque conforme placidamente discendono in quella porzione di fondo più depressa, così placidamente ancora la surmontino.

195. Con questa occasione egli è quì da notarsi, che gli alvei de' fiumi siano stati formati dalla natura col moto stesso dell'acque. Imperocchè, comunque elle si muovano sulla superficie di questa nostra terra, sempre col loro peso si sforzano di portarsi verso il suo centro; onde, insinuandosi tratto tratto nel terreno, su di cui si muovono, conforme con iscavarlo si formano l' alveo, così con spingerlo dall' uno, e dall'altro lato innalzano altresì le di lui sponde. Quindi, sebbene ne' terreni orizzontali, ed egualmente resistenti da ambe le parti gli alvei de' fiumi siano dritti; nientedimeno debbono essi piegare, e farsi tortuosi lad-

dove,

dove, o il terreno s'innalza, o ritrovasi essere di maggior resistenza. E poichè niente vieta, che un terreno sia più resistente in un luogo, e meno in un'altro; quindi ancora si è, che gli stessi alvei non siano della stessa larghezza da per tutto, ma dove più stretti, e dove più larghi.

196. In secondo luogo, conforme avviene ben spesso, che due acque, dopo essersi portate separatamente per due alvei diversi, si riuniscano insieme, e continuino il loro moto pe un'alveo comune; così non v'ha dubbio, che seguita l'unione debbano muoversi unitamente con quella velocità, e con quella direzione, che si hanno con comporre insieme le proprie loro velocità, e le proprie loro direzioni. Onde, se BA, CA siano le velocità, e le direzioni delle due acque, e compiscasi il parallelogrammo ABDC; sarà DA la velocità, e la direzione, con cui le stesse acque unite insieme entreranno nel comune alveo. Or, se alzata sulla DA la perpendicolare EAF facciasi, che le due EG, FH siano perpendicolari ancora sull'altre due BA, CA; chiaro si è, che saranno eguali tra loro, così i due angoli DAB, AEG, come gli altri due DAC, AFH; e pertanto, facendosi equiangoli i due triangoli DBC, EIF, saranno le tre velocità BA, CA, DA in ordinata ragione colle tre perpendicolari EI, FI, EF. *Fig. 7.*

197. Or conforme i due punti E, ed F, da cui si sono abbassate sulle due BA, CA le perpendicolari EG, FH, sono stati presi ad arbitrio; così, se mai prendansi in modo, che le porzioni AG, AH, tagliate dalle due BA, CA con quelle perpendicolari, siano nella stessa ragione colle sezzioni, per cui le due acque escono dai loro alvei, egli è facile il dimostrare, che la sezzione, per cui le stesse acque entrano insieme nell'alveo comune, debba corrispondere in proporzione all'altezza IL del triangolo EIF. In fatti si vuole, che le due acque escano dai loro alvei per sezzioni, che ~~sino~~ siano nella stessa ragione colle due AG, AH. Ma le velocità, con cui escono per quelle sezzioni, sono come

me l'altre due EI, FI. Dunque, se prendansi di esse quelle quantità, che escono in un dato tempo per le stesse sezzioni, siccome la loro ragione dee comporsi di quella delle sezzioni, e di quella delle velocità, così saranno tra essoloro in ragion composta di AG ad AH, e di EI ad FI.

198. E poichè in questa stessa ragion composta sono altresì i due triangoli AEI, AFI, saranno le riferite quantità delle due acque nella medesima ragione con questi due triangoli. Ma quelle quantità d' acque, che escono in un dato tempo per le sezzioni dei due alvei, debbono entrare unitamente, ed in egual tempo per la sezzione dell'alveo comune. Dunque, per essere il triangolo EIF eguale alla somma dei due AEI, AFI, e per essere altresì la sua base EF proporzionale alla velocità, con cui entrano le due acque insieme per la sezzione dell'alveo comune; per necessità questa sezzione dovrà corrispondere in proporzione all'altezza IL dello stesso triangolo. Onde, date le direzzioni dell'acque in tutti tre gli alvei, e date ancora così le sezzioni, per cui escono le stesse acque dagli alvei proprj, come le velocità, colle quali escono, potrà determinarsi facilmente la sezzione, per cui unite insieme entrano nell'alveo comune.

1 9. Finalmente, conforme non di rado avviene, che dividansi in due rami l'acque, che corrono per un medesimo alveo; così non è egli da porsi in dubio, che l' acque divise debbano entrare in questi rami colle velocità, che si hanno, con risolvere secondo le loro direzioni la velocità, con cui escono unite dal comune loro alveo. Fingiamo perciò, che sia DA la velocità e la direzione, con cui l'acque unite insieme escono dall'alveo loro comune; e fingiamo ancora, che siano AM, AN le direzioni, con cui le stesse acque divise entrano nei due rami. Se adunque intorno alla DA come diagonale formisi con queste direzioni prolungate il parallelogrammo ABDC; saranno BA, CA le velocità, con cui entreranno l'acque di-

Fig.7.

vi-

vife nei loro rami, o fiano alvei. Onde, fe alzata fulla DA la perpendicolare EAF, fi abbaffino fulle due BA, CA l'altre perpendicolari EG, FH, che s'incontrino nel punto I; pure le tre velocità DA, BA, CA faranno in ordinata ragione colle tre perpendicolari EF, EI, FI.

200. Effendo così, fe IL fia l'altezza del triangolo EIF, e le due perpendicolari EG, FH fianfi abbaffate in modo fulle due BA, CA, che IL fia ad AG, come la fezzione, per cui efcono l'acque dall'alveo comune, alla fezzione, per cui entrano quelle, che fi feparano colla direzione AM; quì ancora potrà dimoftrarfi, che la terza fezzione, per cui entrano l'altre, che fi feparano colla direzione AN, debba corrifpondere in proporzione alla AH. Onde, fe fiano date tutte tre le direzioni, e con effe fia data ancora tanto la velocità, con cui efcono l'acque dal comune alveo, quanto ciafcuna delle prime due fezzioni; fi determinerà la terza fezione, primieramente con tagliare dalle due DA, BA le porzioni AK, AG, che fiano tra loro, come le due fezzioni date; indi con alzare fulla AG la perpendicolare EI, e con tirare la KI paralella alla EF, che s'incontri colla EI nel punto I; ed in fine con abbaffare da quefto punto fulla CA l'altra perpendicolare IF, che taglierà da effa la porzione AH, a cui corrifponde in proporzione la terza fezzione, che fi dimanda.

XIX

Dell'alterazioni cagionate nel moto dell'acque correnti da caufe efterne.

201. PUò alterarfi il moto dell'acque correnti, non folo per l'irregolarità, che incontranfi nel loro alveo; ma eziandio per caufe efterne, come per nuove acque fopravenienti, per oftacoli pofti nell'alveo, ed in fine per rigurgiti cagionati da moto contrario. Quindi, per efaminare brevemente queft'altre alterazioni, che fono temporanee, incominceremo da quelle, che derivano

da

da nuove acque, che sia per lo scioglimento delle nevi, sia per piogge dirotte, e strabbocchevoli s'intromettono nell'alveo. Ed in vero, sebbene colla loro aggiunta facciasi maggiore la copia d'acque, che passano in un dato tempo per ciascuna sezzione dell'alveo; nientedimeno non dobbiamo darci a credere, che eziandio la sezzione debba farsi sempre più alta, e che la sua altezza debba aumentarsi a misura della maggior copia d'acque, che tramanda.

202. Perciò convien riflettere, che siccome le nuove acque entrano nell'alveo colla propria loro velocità; così coll'ingresso di esse dee farsi maggiore, non solo la copia d'acque, che passano per la sezzione in un tempo dato, ma eziandio la velocità mezza, con cui elle passano. Si considerino adunque in un medesimo sito dell'alveo due sezzioni: cioè quella, per cui passavano le sole prime acque; e l'altra, che concede il passaggio così alle prime, come alle nuove. E conforme queste due sezzioni, almeno nella supposizione di esser due parallelogrammi rettangoli situati su di una stessa base, sono come le loro altezze; così non è egli da porsi in dubbio, che queste loro altezze siano tra esso loro in ragion composta della diretta delle quantità d'acque, che passano in egual tempo per le due sezzioni, e della reciproca delle velocità mezze, con cui passano.

203. Quindi, siccome la sezzione coll'aggiunta delle nuove acque allora solamente dee farsi più alta, quantevolte la velocità mezza aumentasi in minor ragione della copia d'acque, che tramanda in un dato tempo; così l'aumento, che riceve la sua altezza, dovrà esser minore di quello, che ci addita la maggior copia d'acque, che passano per la sezzione in quel tempo dato. Conforme poi, aumentandosi la velocità mezza nella stessa ragione colla riferita copia d' acque, dee rimanere la sezzione della stessa altezza; così dovrà ella farsi più bassa, se mai la velocità mezza si aumenti in maggior ragione della stessa copia d'acque. Onde,

de, per giudicare del cambiamento, che ſoffre l'altezza della ſezzione, dovrà tenerſi conto, così dell'aumento, che riceve la copia d'acque, che eſce per la ſezzione in un dato tempo, come dell'altro, che ſopravviene alla ſua velocità mezza: ben'inteſo però, che ſiccome il primo l'aumenta, così al contrario l'altro la minora.

204. Quindi, ſe mai ſia noto, come aumentaſi la velocità mezza per rapporto alla copia d'acque, che paſſano per la ſezzione in un tempo dato; potrà determinarſi facilmente, come debba cambiarſi l'altezza della ſezzione per rapporto alla ſteſſa copia d'acque. In fatti, aumentandoſi la velocità mezza nella ſudduplicata ragione della copia d'acque, dee aumentarſi l'altezza della ſezzione nella ſteſſa ſua ſudduplicata ragione; ma ſe mai la velocità mezza ſi aumentaſſe nella duplicata ragione della copia d'acque, in tal caſo l'altezza della ſezzione dovrebbe diminuirſi nella ſemplice ſua ragione. E così ancora, aumentandoſi la velocità mezza nella ſubtriplicata ragione della copia d'acque, dee aumentarſi l'altezzza della ſezzione nella ſua ſeſquiplicata ragione; ma ſe mai la velocità mezza ſi aumentaſſe nella triplicata ragione della copia d'acque, all'ora l'altezza della ſezzione dovrebbe diminuirſi nella ſua duplicata ragione.

205. Per paſſare ora all'altra alterazione, che ſoffrono l'acque correnti per qualche impedimento poſto nell'alveo, come per un'edificio, che da una delle due ſponde ſporgeſi dentro di eſſo; fingiamo, che ſia ABCD la ſezzione libera dell'alveo, e che l'edificio MBEN ſituato dentro di eſſo ne occupi la porzione ABEF. Se adunque ſiaſi ſituato l'edificio in modo, che ſi opponga direttamente al corſo dell'acque, conforme debbono arreſtarſi innanzi ad eſſo quell'acque, che paſſar dovrebbero per la porzione della ſezzione ABEF; così le medeſime, innalzandoſi a poco a poco, ſi ſpanderanno su di quell'altre, che paſſano per la porzione rimanente DCEF, e ne aumenteranno in conſeguenza l'altezza. Onde, ſe mai l'edificio

Fig. 8.

ſia

sia così alto, che l'une, e l'altre acque insieme passino tra esso, e l'altra sponda per la sezzione GECH; saranno le due sezzioni ABCD, GECH nella reciproca ragione delle loro velocità mezze.

206. Or siccome le due sezzioni ABCD, GECH sono in ragion composta della diretta delle loro basi BC, CE, e della diretta ancora delle loro altezze CD, CH; così la ragione di quell'altezze si componerà della diretta delle sezzioni, e della reciproca delle basi. Onde le stesse altezze CD, CH saranno tra esso loro in ragion composta della reciproca delle velocità mezze, e della reciproca ancora delle basi BC, CE. Quindi, se mai sia noto, come siano le velocità mezze per rapporto all'altezze; potrà definirsi facilmente, come debbano essere l'altezze per rapporto alle basi delle due sezzioni. Ed in fatti, se voglia supporsi, che le velocità mezze, e l'altezze siano nella stessa ragione; saranno l'altezze nella reciproca sudduplicata ragione delle basi. Ma, se mai le velocità mezze siano nella sudduplicata ragione dell' altezze, come sembra più verisimile; in tal caso l'altezze saranno nella reciproca sesquiplicata ragione delle basi.

207. Opponendosi poi l' edificio obliquamente al moto dell'acque correnti; siccome l'acque, che passar dovrebbero per lo luogo della sezzione occupato dall'edificio, perdono quella sola porzione della loro velocità, la di cui direzione è perpendicolare allo stesso edificio; così colla porzione rimanente continueranno tutta via a muoversi lungo l'edificio, a cui è parallela la sua direzzione. Quindi, se l'obliquità derivi da angolo acuto, che faccia l'edicio colla sponda aggiacente; si muoveranno le riferite acque verso questa sponda, e dopo varie vicende, arrestandosi finalmente nel vuoto dell'angolo saranno come un' impedimento direttamente opposto all'altre, che seguono. Ma se derivi l'obliquità da angolo ottuso, il loro moto si farà verso la sponda opposta; onde con unirsi all' altre acque, che passano per la porzione libera

della

della sezzione, si cambierà dell'une, e dell'altre così la velocità, come la direzione; ed in conseguenza quella velocità cambiata sarà quella, che con passare le due acque insieme per la sezzione più alta GECH dee [illegible]tarsi in modo, che le due sezzioni ABCD, GECH siano nella reciproca ragione delle loro velocità.

208. Rimane da esaminarsi l'alterazione, che ricevono l'acque correnti per rigurgiti cagionati in esse da moto contrario, sia di maree, che s'intromettono ne' loro alvei, sia di venti impetuosi, che soffiano con direzione opposta a quella dell'acque. Ma di quest'alterazione non possiamo per ora trattarne, come si dee. Imperocchè, siccome in ambidue i casi rigurgitar debbono l'acque nel loro alveo per la ragione, che tanto l'acque delle maree, quanto le particelle aeree delli venti, insinuandosi dentro di esse, continuano a muoversi per sino a che, con respingere le stesse acque, perdano interamente la loro velocità; così, per definire l'estensione di tali rigurgiti, bisognerebbe esserci noto, come siano le resistenze, che vicendevolmente si oppongono due fluidi di diversa specifica gravità, di cui ciascuno con direzione contraria muovesi dentro dell'altro: qual cosa deesi da noi altrove esaminare.

209. Solamente egli è quì d'avvertirsi, che sebbene questi rigurgiti abbiano i loro limiti, nientedimeno gli effetti di essi debbono risentirsi eziandio dall'acque, che vengono dalle sezzioni superiori. In fatti l'acque, che rigurgitano per le sezzioni inferiori, sono d'impedimento all'altre, che passar dovrebbero per le stesse sezzioni. Onde, siccome dee diminuirsi la velocità di quest' altre tanto maggiormente, quanto più si avvicinano ai luoghi, in cui quelle rigurgitano; così esse ancora dovranno innalzarsi nelle loro sezzioni persino a che col loro innalzamento acquistino tanta velocità, di quanta hanno bisogno, così per vincere la resistenza dell'acque rigurgitate, come ancora per continuare come prima il loro corso: dimodochè, quantunque l'acque con rigurgitare si sollevino, tutta

vol-

volta i loro rigurgiti non avranno la stessa estensione coll' acque, che veggonsi sollevate nell'alveo.

[illegible]. XX

Delle pressioni, che [illegible]tano l'acque correnti ne' loro alvei.

210. INtorno all'acque correnti sono da esaminarsi altresì le pressioni, che esercitansi da esse, così verso il fondo, come verso le sponde dell'alveo, per cui corrono. Ed in vero, siccome portandosi l'acque per l'alveo, tuttavia sono sostenute dal suo fondo; così non è egli da porsi in dubbio, che le medesime col loro peso agiscano in modo, che le superiori premano l'inferiori, e tutte insieme premano il fondo, che le sostiene. Potrebbe intanto ridirsi, che per ragion del moto debba almeno farsi minore la pressione derivante dal loro peso: siccome veggiamo avvenire ad un corpo, che muovendosi sopra un qualche piano, tanto meno lo preme col suo peso, quanto è maggiore la velocità del suo moto. Ma egli è facile ad intenderv'il divario tra il corpo, che si muove sul piano, e l'acque, che corrono nel loro alveo.

211. In fatti, con muoversi il corpo su'l piano, la pressione proveniente dal suo peso in un tempo dato, si distribuisce egualmente a tutte le parti del piano, che percorre il corpo in quello stesso tempo; e quindi si è, che ciascuna di esse tanto meno ne partecipi, quanto è maggiore il loro numero, ed in conseguenza la velocità, con cui si muove il corpo. Ma, sebbene lo stesso avvenga altresì alla pressione, che deriva dal peso di qualsisia porzione dell'acque correnti; nientedimeno questa porzione è seguita immediatamente da altre eguali, le di cui pressioni si distribuiscono eziandio egualmente alle parti del fondo, per cui si portano. Onde, fatto il calcolo, sempre si ritroverà, che l'acque correnti premano il fondo del

loro

loro alveo nella ſteſſa guiſa, che lo premerebbero, ſe foſſero ſtagnanti, e prive di moto.

212. Potrebbe ancora ridirſi, che l'acque correnti impiegano tal volta il loro peſo in riacquiſtare la velocità, che perdono per ragion delle reſiſtenze, che incontrano nel loro alveo. Ma egli è facile il far vedere, che riacquiſtaſi da eſſe la velocità perduta, ſenza detrimento della preſſione, che tramandano perſino al fondo. In fatti, ſiccome con ritardarſi l'acque inferiori, gli immediati loro elementi ſeparanſi per piccoli intervalli dagli altri, che li precedono; così i medeſimi elementi per le preſſioni, che ſoffrono col peſo degli altri ſuperiori, ſi dilateranno verſo quegli intervalli, e ſi faranno in conſeguenza più baſſi. Onde, conforme con queſto loro abbaſſamento debbono dar luogo agli altri ſuperiori, di cadere ſopra di eſſi, e di ſpingerli più oltre con quella velocità, che acquiſtano cadendo; così riacquiſteranno i medeſimi la velocità perduta, ſenza diminuirſi la preſſione, che tramandano per fino al fondo.

213. Or, ſiccome l'acque correnti eſercitano col loro peſo la preſſione verticale verſo il fondo dell'alveo, per cui corrono; così, attenta l'indole degli immediati loro elementi, deeſi dalle medeſime eſercitare altresì l'altra preſſione laterale verſo le ſponde dello ſteſſo alveo. Nè vale il dire, che quegli elementi colla preſſione verticale, che ſoffrono, ſi dilatino effettivamente verſo quella parte dell'alveo, per cui ſi portano; ed in conſeguenza che affatto non ſi sforzino di dilatarſi eziandio verſo le ſponde. Imperocchè egli è da rifletterſi, che l'acque per l'alveo corrono in modo, che ſenza qualche reſiſtenza nè pure per piccoli intervalli ſeparanſi l'une dall'altre. Onde, ſiccome quelle, che precedono, ſervono quaſi di riparo all' altre, che immediatamente le ſeguono; così i loro elementi non mai potranno dilatarſi verſo quella parte dell'alveo, per cui ſi portano.

214. Quantunque poi l'alveo, per cui corrono l'acque, comunichi colla vaſca, da cui le ſteſſe

acque si diramano; nientedimeno per ragion del moto l'acque, che corrono per l'alveo, non sono in equilibrio con quelle, di cui constantemente la vasca si riempie. Quindi, sebbene con essere più alte l'acque nella vasca debba aumentarsi la velocità dell' altre, che si portano per l' alveo; tuttavolta la maggiore loro altezza niente conferisce all' aumento delle pressioni, che esercitansi da quest'altre acque, così verso il fondo, come verso le sponde del loro alveo. Onde, per quanto all'altezze, di cui si ha bisogno, per definire le riferite pressioni, dovranno queste prendersi dalla suprema superficie, non già dell'acque racchiuse nella vasca, ma di quelle, che correndo per l'alveo esercitano le pressioni, di cui si tratta.

215. Può avvenire intanto talvolta, che eziandio per definire le pressioni, che esercitansi dall'acque correnti nel loro alveo, debbansi prendere l'altezze dalla suprema superficie dell'acque racchiuse nella vasca. Fingiamo perciò, che l'acque corrano per un'alveo, che sia chiuso ancora al di sopra; e che l'ultima sezzione di quest' alveo abbia nella sua ampiezza un' impedimento, che vieti il passaggio all' acque, che con esso s'incontrano. Non potendo adunque quest'acque passare per la sezzione, bisognerà, che ristagnino dentro dell'alveo; ed in conseguenza, come prive di moto, dovranno equilibrarsi coll'altre della vasca, con cui comunicano. Onde, siccome per questo equilibrio si sforzano di elevarsi alla stessa altezza di quell'altre; così dalla parte superiore dell'alveo saranno respinte verso il fondo con forza eguale, e contraria.

216. Or non v'ha dubbio, che coll'aggiunta di quest'altra forza debbano aumentarsi le pressioni, che esercitano le stesse acque, così verso il fondo, come verso le sponde dell'alveo. Onde, conforme dee tenersi conto di quest'altra forza, qualora trattasi di definire le riferite pressioni; così per necessità l'altezze, di cui si ha bisogno per definirle,

le, dovranno prenderſi dalla ſuprema ſuperficie dell'acque racchiuſe nella vaſca. Ed egli è da notarſi, che nella ſuppoſizione di eſſere l'alveo chiuſo ancora al di ſopra, e di ritrovarſi un qualche impedimento nell'ampiezza dell' ultima ſua ſezzione, non ſolo aumentaſi dentro dell' alveo, così la preſſione verticale, come la laterale; ma ſi fa acquiſto altresì di un' altra preſſione, cioè di quella, che ſoffre la parte ſuperiore dell'alveo per lo ſforzo, che fanno l'acque trattenute dentro di eſſo, per elevarſi alla ſteſſa altezza con quelle della vaſca.

217. Quindi intorno all'acque, che corrono per alvei chiuſi ancora al di ſopra, debbonſi diſtinguere due caſi. Il primo ſi è, quando tutte l'acque, che dalla vaſca s'inſinuano nell' alveo, portanſi liberamente per lo ſteſſo alveo; ed in queſto caſo, ſebbene per determinare i diverſi gradi di velocità, che ritrovanſi avere i diverſi ſtrati dell'acque, debbanſi prendere l'altezze dalla ſuprema ſuperficie dell'acque racchiuſe nella vaſca; nientedimeno, per definire le preſſioni, che ſoffrono le diverſe parti dell'alveo, l'altezze dovranno prenderſi dalla ſuprema ſuperficie dell'acque, che eſercitano quelle preſſioni. L'altro caſo ſi è, quando per impedimento, che ritrovaſi nell'ultima ſezzione dell'alveo, ſi arreſta per tutta la ſua lunghezza porzione dell'acque, che s'intromettono dalla vaſca nello ſteſſo alveo; ed in queſt'altro caſo, così per determinare le velocità, come per definire le preſſioni, biſognerà prendere l' altezze dalla ſuprema ſuperficie, che ritrovanſi avere l' acque racchiuſe nella vaſca.

218. Secondo poi è ſtato avvertito, la ragione del divario tra queſti due caſi dee ripeterſi da ciò, che qualora per tutta la lungezza dell' alveo arreſtaſi porzione dell'acque, che dalla vaſca ad eſſo ſi tramandano; incominciano ad agire tra eſſo loro l'acque arreſtate nell'alveo, e l'altre racchiuſe nella vaſca; ed in conſeguenza per ragion dell'equilibrio, in cui debbono porſi l'une coll'altre, ſi ſfor-

zeranno le prime di elevarsi alla stessa altezza dell'altre, col quale sforzo tanto esse, quanto quelle, che corrono per l'alveo, eserciteranno le loro pressioni con forza maggiore. Conforme però per l'aumento delle pressioni è necessario, che l'acque arrestate per tutta la lunghezza dell'alveo abbiano comunicazione con quelle della vasca; così se mai l'impedimento si ritrovi, non già nell'ultima sezzione dell'alveo, ma in una di quelle di mezzo, si aumenteranno le pressioni per fino a questa sezzione; e ciò per la ragione, che per fino ad essa giungono l'acque arrestate nell'alveo.

XXI.

Della derivazione dell'acque, e della resistenza de' canali, con cui si derivano.

219. QUantunque dalla natura provida siansi formati moltissimi fiumi nella superficie di questa nostra terra; nientedimeno per gli bisogni della vita civile avviene ben spesso, che porzione delle loro acque debbansi derivare dai loro alvei, e condurre per altri canali in luoghi, ove necessitano. Quindi, per non lasciare intutto, e senza esame questo punto, in cui sono di conseguenza gli errori, che si commettono; noteremo primieramente, che siccome l'acque, le quali derivansi da un qualche fiume, debbonsi portare per fino al dato luogo col proprio loro peso; così prima di ogn'altra cosa bisogna esaminare, se tanto il luogo dato, quanto ogn'altro luogo, per cui passar debbono l'acque, sia più basso del fiume, da cui si derivano. Imperocchè, sebbene quella velocità, che acquistano cadendo, possa farle risalire alla stessa altezza; ciò però dee intendersi, prescindendo dalle resistenze, che incontrar possono nel loro cammino.

220. Per queste resistenze adunque è necessario, che i luoghi erti del terreno, per cui condur si debbono l'acque, non solo siano più bassi del fiu-

fiume; ma si succedano ancora talmente, che calando l' acque per uno di essi, possano colla velocità acquistata risalire per tutta l'altezza dell' altro, che segue. Anzi per le stesse resistenze, ancora essendo piano, ed unito il terreno, dee egli avere qualche pendenza verso il luogo dato; poichè nel corso orizontale riacquistono l'acque la velocità perduta, sempre quando sono così copiose, che elevansi ad un'altezza notabile ne' loro canali. Onde, per queste ragioni, la prima operazione da farsi si è, di livellare tutto il terreno, che si framezza tra il fiume, ed il luogo dato; e di esaminare in conseguenza, se sia egli capace di dar corso all'acque, che debbono condursi dal fiume per fino al dato luogo.

221. Essendosi trattato dell'arte di livellare diffusamente nella Geometria pratica, stimiamo inutile ragionarne di nuovo in questo luogo. Solamente avvertiremo, che nella materia, di cui si tratta, debbono eseguirsi le regole, che ella prescrive, con tutto il rigore possibile; e ciò per la ragione, che ogni minimo errore, che si commette nel livellare il terreno, rende tal volta inutile, ed infruttuosa l'operazione principale. Per quanto poi alla pendenza da darsi all'acque, perchè possano continuare il loro moto ne' canali, per mezzo di cui si conducono; la regola usuale de' Pratici si è, che per ogni cento piedi debba darsi ad esse la pendenza di un mezzo piede. Ed in fatti una tal regola, come ricavata dall'osservazioni, dee eseguirsi con esattezza, qualora l' acque, che si derivano, sono in piccola copia, e si conducono per fino al luogo dato per mezzo de' tubi, o siano canali chiusi.

222. Intanto, se l'acque, che si derivano da un qualche fiume, siano così copiose, che per condurle per fino al dato luogo, debba formarsi nel terreno un'alveo, proporzionato alla loro copia; in tal caso potrà diminuirsi a proporzione la loro pendenza; e ciò per la ragione, che aumentandosi la copia dell'acque, più facilmente le medesime

desime col loro moto possono vincere, e superare le resistenze, che incontrano nel loro alveo artificiale. Onde giova quì l'avvertire, che dee giudicarsi della pendenza da darsi all'acque, non solo per lo cammino, che debbono fare, ma eziandio per la loro copia: ben' inteso però, che siccome cammino più lungo ha bisogno di maggior pendenza, così al contrario copia maggiore d'acque richiede pendenza minore: dimodochè per due diverse acque le pendenze dovranno essere tra esso loro in ragion composta della diretta de' loro cammini, e della reciproca delle loro quantità.

223. Or, siccome essendo copiose l'acque, che si derivano dal fiume, debbono condursi le medesime fino al luogo dato per mezzo di un' alveo, che dee farsi su'l terreno proporzionato alla loro copia; così, se mai il terreno non sia unito, ma s'incontri in esso qualche valle, per cui l'acque dovrebbero prima calare, ed indi risalire, chiaro si è, non potersi continuare su di questa valle l'alveo, di cui si ha bisogno, se ella non si elevi alla stessa altezza col terreno, che le sovrasta da ambedue le parti. Perciò si dovranno construire in essa degli archi, che colla loro altezza sollevino per dir così la sua cavità; e su di questi archi dovrà continuarsi l'alveo, con cui debbono condursi l'acque per fino al luogo dato. Ma, siccome la struttura di tali archi richiede delle spese immense, le quali da molti pochi possono farsi; così rare volte avviene, che debbano derivarsi acque da fiumi per mezzo d' alvei così dispendiosi.

224 Si vuole intanto quì notare, che sebbene non sia necessario, di coprire l'alveo, che formasi su'l terreno, per condurre l'acque derivate dal fiume; nientedimeno il costume si è di coprirlo, sì perchè possa tenersi più custodito, come ancora per conservare all' acque la loro limpidezza. Dee aversi però l'avvertenza di lasciare su di esso di tratto in tratto dell'aperture, per cui possano avere

re l'acque il loro sfogo. Imperocchè, se mai il fiume, da cui derivansi l'acque, facciasi torbido, e conduca seco dell'arene; può avvenire, che porzione di quest'arene entrando nell'alveo artificiale, e raccogliendosi in una delle sue sezzioni, siano d'impedimento all'acque, che con esse s'incontrano. Onde, conforme col ristagnamento di quest'acque debbono aumentarsi nello stesso alveo le pressioni; così giova, che egli abbia quell'aperture, affinchè per esse possano uscire l'acque, quantevolte colle pressioni aumentate fanno sforzo per sollevarsi.

225. Qualora poi l'acque, che si derivano dal fiume, non sono molto copiose; non solo non è egli necessario, di condurle per mezzo di un' alveo fatto su 'l terreno, ma più tosto sarebbe ad esse di detrimento un canale di quella indole; e ciò per la ragione, che dissipandosi quelle a poco a poco dentro dello stesso canale, o non giungerebbero [illegible] fino al dato luogo, o si diminuirebbe a tal segno la loro quantità, che non sarebbero di uso veruno. Per l'acque adunque, che non sono in molta copia, dee farsi uso de' tubi, la di cui ampiezza similmente dee essere proporzionata alla loro quantità; e con questi tubi potranno condursi l'acque eziandio per luoghi, in cui s'incontrano delle discese, e delle salite. Imperocchè, siccome con molti di essi uniti insieme dee formarsi l'intero canale, per mezzo di cui si conducono l'acque; così niente vieta di unirgli in modo, che abbiano tra esso loro qualunque situazione si voglia.

226. Debbono farsi intanto questi tubi in modo, che siano capaci di sostenere le pressioni, che esercitano contro di essi l'acque, che conducono. E quantunque per la loro formazione possa farsi uso di diverse materie; nientedimeno, siccome non in ogni materia sono unite le sue parti colla stessa forza, così neppure per qualunque materia dee darsi al tubo la stessa grossezza. In fatti resistono i tubi alle pressioni dell' acque,

non solo per la loro grossezza, ma eziandio per la forza, che unisce insieme le loro parti. Onde, conforme le loro fermezze sono in ragion composta delle loro grossezze, e delle forze, che uniscono insieme le loro parti; così saranno due tubi di egual resistenza, quantevolte le loro grossezze sono nella reciproca ragione di quelle forze.

227. Siccome poi le forze, che uniscono insieme le parti di due diverse materie, sono presso a poco nella stessa ragione colle loro densità; così, attento quest'altro principio, saranno due tubi di egual resistenza, sempre quando le loro grossezze sono nella reciproca ragione delle loro densità. Ma egli è da notarsi, che questo teorema ha luogo ne' tubi, che sono della stessa lunghezza, e soffrono in conseguenza pressioni eguali. Imperocchè, se mai uno di essi sia più lungo, in tal caso cambiasi così la pressione, che egli soffre, come la fermezza, con cui la sostiene: col divario bensì, che la prima aumentasi nella stessa ragione colla lunghezza del tubo, e la seconda al contrario si minora in quella ragione. Onde due tubi di diversa lunghezza saranno egualmente resistenti, quante volte le grossezze di essi sono in ragion composta della duplicata diretta delle loro lunghezze, e della semplice reciproca delle loro densità.

228. Anzi si vuol'ancora notare, che ambidue i riferiti teoremi debbonsi intendere de' tubi di egual diametro, siccome sono quelli, con cui formasi l'intero canale dell'acque. Imperocchè, se mai uno dei due tubi abbia diametro maggiore; in tal caso aumentasi, così la pressione, che egli soffre, come la fermezza, con cui la sostiene: col solo divario, che la prima si aumenta nella duplicata ragione del diametro, e la seconda nella ragion semplice. Onde due tubi di diversa lunghezza, e di diverso diametro saranno egualmente resistenti, quantevolte le loro grossezze sono in ragion composta della duplicata diretta delle loro lunghezze, della semplice diretta de' loro diametri, e della semplice reciproca delle loro densità.

Ed

Ed essendo così, se mai coll'esperienza sia nota la grossezza, che dee avere un tubo, per sostenere la pressione, che egli soffre; potrà definirsi facilmente la grossezza, di cui ha bisogno ogn'altro tubo, per sostenere la sua.

Dell' innalzamento dell'acque per mezzo della coclea d'Archimede.

229. SEbbene l'acque col loro peso non mai possano innalzarsi più di quello, che porta la loro discesa; nientedimeno, con far uso di machine, che siano mosse da forze esterne, niente vieta di elevarle a qualsisia altezza. Tra le machine intanto, che si sono pensate per l'innalzamento dell'acque, merita special considerazione la coclea, o sia vite d'Archimede. Onde, tralasciando tutte l'altre, che sono facili ad intendersi, ci restringeremo al solo esame della riferita coclea, la quale ad altro non si riduce, se non se ad un tubo avvolto intorno ad un cilindro in forma di spirale. E poichè per la sua construzzione primieramente dee segnarsi la spirale nella superficie convessa del cilindro, ed indi dee addattarsi su di essa il tubo, che dee avvolgersi intorno al cilindro; perciò prima d'ogn'altra cosa bisogna far vedere, come sulla riferita superficie possa segnarsi la spirale, di cui si ha bisogno.

230. Ed in vero, se si spieghi sopra di un piano la superficie convessa di un cilindro, non v'ha dubio, che con essa si avrà un parallelogrammo rettangolo. Sia adunque ABCD il parallelogrammo rettangolo, che si ha con ispiegarsi quella del cilindro, su di cui dee segnarsi la spirale; e dividasi egli in altri più piccoli parallelogrammi con rette parallele alla sua base BC, ed egualmente distanti l'una dall'altra. Tirinsi in quest' altri parallelogrammi le diagonali in modo, che siano parallele tra esso loro; e se la superficie del parallelogrammo avvolgasi di nuovo intorno al cilin- Fig. 9.

dro,

dro, si avrà con quelle diagonali incurvate la spirale, che si dimanda. Ma si potrà ella avere parimente, se divisa la retta, per mezzo di cui si descrive la superficie del cilindro, in parti eguali, avvolgasi intorno al cilindro una corda, che passando per gli punti della divisione di quella retta, resti tesa sulla superficie dello stesso cilindro.

231. Quindi si determinerà la lunghezza di ciascuno giro della spirale, primieramente con fare i quadrati della circonferenza della base del cilindro, e della distanza tra due giri vicini; ed indi con estrarre la radice quadrata dalla loro somma. E poichè la spirale è della stessa curvatura da per tutto, saranno tra esso loro le varie porzioni di ciascuno de' suoi giri, come gli archi della base del cilindro, a cui corrispondono quelle porzioni. Onde, perchè un giro intero corrisponde all'intera circonferenza della riferita base; sarà altresì, come un' intero giro della spirale ad una delle sue porzioni, così l'intera circonferenza della base del cilindro all'arco di essa, a cui corrisponde la suddetta porzione; ed in conseguenza con questo teorema potrà determinarsi eziandio la lunghezza di qualsisia porzione di uno delli giri della spirale.

232. Conforme poi la spirale segnata sulla superficie convessa del cilindro è della stessa curvatura da per tutto; così colle rette, che tiransi sulla stessa superficie parallele al suo asse, formerà ella sempre lo stesso angolo. Anzi per poco, che si voglia riflettere, s'intenderà altresì, che il raggio debba essere alla tangente di quest'angolo, come la distanza di due giri vicini alla circonferenza della base del cilindro. Onde, volendosi determinare il riferito angolo, primieramente dovrà farsi, come la distanza di due giri vicini alla circonferenza della base del cilindro, così il raggio ad un'altro numero; ed indi nel canone trigonometrico dovrà ritrovarsi l'angolo acuto, a cui quest'altro numero rapportasi come tangente

Si

Si vede intanto, che conforme il suddetto angolo dee essere eguale alla metà di un retto, quante volte la distanza di due giri vicini è eguale alla circonferenza della base del cilindro; così, con aumentarsi, o diminuirsi questa distanza, debba farsi al contrario l'angolo minore, o maggiore della metà di un retto.

233. Non ci siamo dati la pena di render ragione delle riferite proprietà della spirale cilindrica, perchè possono facilmente ricavarsi dalla stessa sua descrizione, e specialmente da quella, che si fa con ispiegare sopra di un piano la superficie convessa del cilindro. Ma dalla stessa descrizzione possiamo dedurne altresì, che le rette comprese tra un giro della spirale, ed una delle due circonferenze di cerchio, che lo terminano, siano in data ragione cogli corrispondenti archi circolari. In fatti, se BCEF sia uno de' parallelogrammi, in cui dividesi la superficie cilindrica spiegata su'l piano; avremo colla sua diagonale BF uno de' giri della spirale, e coi suoi lati BC, EF le due circonferenze di cerchio, che lo terminano. Onde, siccome le rette comprese tra quel giro della spirale, ed una di queste circonferenze, per l'indole della superficie cilindrica, debbono essere parallele agli altri due lati BF, CE; così ciascuna di esse sarà al corrispondente arco circolare, come BF ad EF, o pure come CE a BC. *Fig.9.*

234. Segnata la spirale sulla superficie convessa del cilindro, si adatterà in appresso su di essa il tubo, che dee avvolgersi intorno allo stesso cilindro. E poichè l'acque debbono portarsi in alto per mezzo di questo tubo; perciò, siccome bisogna formarlo di una materia, che permetta di potersi egli adattare sulla spirale; così dee darsi ad esso tanta grossezza, che possa sostenere il peso dell'acque, di cui si riempie. Anzi conforme il tubo dee adattarsi in modo sulla spirale, che resti su di essa fermo, ed immobile; così giova munirlo per tutta la lunghezza del cilindro con altro riparo esteriore, che lasci libero solamente,

così

così l'orificio, per cui entrano l'acque, come l'altro, per cui debbono uscire; onde si è, che il cilindro sì per questo riparo esteriore, come per lo tubo avvolto intorno ad esso si ritroverà non poco aumentato di diametro.

235. Spiegata la struttura della coclea, o sia della vite d'Archimede; veggiamo presentemente, come di essa debba farsi uso, per sollevare l'acque ad altezza maggiore. Sia perciò BC la suprema loro superficie, su di cui inclinisi primieramente la coclea ABCD in modo, che resti fuori dell'acque una porzione della sua base, come BFC; indi la stessa coclea si aggiri talmente intorno al suo asse, che il suo orificio inferiore si porti per dentro dell'acque secondo la direzzione de' punti B, E, C. Siccome adunque in ciascuna rivoluzione debbonsi intromettere acque nella coclea per questo orificio suo inferiore; così, aumentandosi la copia di esse di mano in mano, giungeranno finalmente all'altro suo orificio superiore. Onde, con aggirare sempre più la coclea, l'acque intromesse usciranno per quest'altro orificio, le quali in conseguenza si ritroveranno elevate alla sua medesima altezza.

Fig. 10.

236. Può avvenire intanto talvolta, che o affatto non entrino acque nella coclea, o pure, che n' entrino in poca quantità; onde per vedere donde derivi questo suo difetto, convien riflettere, che siccome debbono entrare l' acque nella coclea, quantevolte l' orificio suo inferiore portasi per dentro di esse dal punto più basso E per fino a C; così nell'uscire quest'orificio da C dovrà ritrovarsi piena d'acque la porzione del primo giro, che rimane immersa nelle stesse acque. Onde, conforme in ciascuna rivoluzione intromettonsi nella coclea tante acque, e non più, quante può contenerne l' immersa porzione del primo giro; così deriva il riferito difetto, o dal non immergersi nell' acque porzione veruna di detto giro, o pure dall' esser molto piccola la porzione, che di esso rimane immersa.

237. La

237. La ragione poi, per cui ritrovandosi l'orificio inferiore nel punto C, non sempre immergesi nell'acque una qualche porzione del primo giro della coclea, dee ripetersi da ciò, che o la spirale forma colle rette cilindriche un'angolo molto acuto, ed in conseguenza, che i suoi giri siano molto distanti tra esso loro; o pure, che la coclea non siasi a bastanza inclinata sulla suprema superficie dell'acque. Ed in fatti egli è facile il dimostrare, che in quella posizione dell'orificio inferiore all'ora solamente immergesi nell'acque una qualche porzione del primo giro della coclea, sempre quando l'angolo, che forma la spirale colle rette cilindriche, è maggiore di quello, con cui s'inclina la coclea sulla suprema superficie dell'acque. Suppongasi per-ciò, che sia CG la porzione di detto giro immersa nell'acque, e dal punto G, in cui ella si termina, tirisi nella superficie cilindrica la retta GH, che s'incontri colla circonferenza della base nel punto H.

238. Se adunque da questo punto si abbassi sulla BC la perpendicolare HI, sarà l'arco CH maggiore della perpendicolare abbassata HI; e pertanto la retta cilindrica GH avrà minor ragione all' arco CH, che alla perpendicolare HI. Ma per le proprietà della spirale rapportate di sopra, la retta GH sta all'arco CH, come la distanza di due giri vicini all'intera circonferenza della base, o pure come il raggio alla tangente dell'angolo, che forma la spirale colle rette cilindriche. E per essere il triangolo GHI rettangolo in H, la GH sta alla HI, come il raggio alla tangente dell'angolo HGI, o sia dell'angolo, con cui inclinasi la coclea sulla suprema superficie dell'acque. Dunque ancora il raggio avrà minor ragione alla tangente di quel primo angolo, che alla tangente di quest'altro; e pertanto l'angolo, che forma la spirale colle rette cilindriche, sarà maggiore dell'angolo, che ci addita l'inclinazione della coclea.

239. Secondo questo teorema chiaro si è, che immergesi nell'acque porzione del primo giro del-

la coclea, ritrovandosi l'orificio inferiore nel punto C, sempre quando la stessa coclea inclinasi in modo sulla suprema loro superficie, che l'angolo, con cui serpeggia la spirale intorno al cilindro, sia maggiore di quello, che ci addita la sua inclinazione. Ma, per giudicare come si dee della porzione, che immergesi di detto giro, giova dimostrare un'altro teorema, il quale si è, che essendo CH l'arco circolare, a cui corrisponde l'immersa sua porzione, debba essere come CH ad HI, così la tangente del primo angolo alla tangente del secondo. Ed infatti l'arco CH sta alla retta cilindrica GH, come la tangente del primo angolo al raggio. Ma la retta cilindrica GH sta alla HI, come il raggio alla tangente del secondo angolo. Dunque, ordinando, l'arco CH starà alla HI, come la tangente del primo angolo alla tangente del secondo.

240. Da quest' altro teorema possono dedursi ora varie conseguenze intorno alla porzione del primo giro della coclea, che dee immergersi nell'acque, ritrovandosi l'orificio inferiore nel punto C. La prima si è, che non debba immergersi di detto giro porzione veruna, sempre quando il primo angolo è minore del secondo. L'altra si è, che debba immergersi di esso una porzione infinitamente piccola, qualora i due angoli sono eguali tra esso loro. La terza si è, che debba immergersi dello stesso giro una porzione finita, quantevolte il primo angolo è maggiore del secondo. La quarta si è, che la porzione immersa del riferito giro debba farsi maggiore, con diminuirsi il secondo angolo maggiormente per rapporto al primo. E la quinta ed ultima si è, che per potersi immergere di detto giro la porzione corrispondente all'intero arco CFB, debba diminuirsi il secondo angolo infinitamente per rapporto al primo.

XXVIII.

XXVII. §. II.

Continuazione dello ſteſſo argomento, e come nell'innalzamento dell'acque debba farſi uſo della riferita coclea.

241. PEr continuare l'eſame della coclea d'Archimede nell'innalzamento dell'acque, noteremo ora, che oltre al riferito difetto, può ella averne un' altro ancora notabile, cioè di mandare fuori colla ſeconda rivoluzione porzione di quell' acque, che ſi ſono intromeſſe in eſſa colla prima. In fatti, ſebbene l'acque, che s'intromettono nella coclea colla prima rivoluzione, con portarſi l'orificio inferiore dal punto C per ſino al punto ſupremo F, debbano col loro peſo entrare in eſſa più in dentro; nientedimeno puo avvenire tal volta, che delle ſteſſe acque ne eſca almeno porzione, qualora lo ſteſſo orificio dal punto ſupremo F ſi abbaſſa per ſino al punto B. Per poco intanto, che ſi voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che non debba incontrarſi nella coclea un tal difetto, ſe ritrovandoſi l'orificio inferiore nel punto B, ed eſſendo M il ſupremo punto del primo giro in queſta ſua poſizione, mantenganſi l'acque intromeſſe nella coclea in quella porzione dello ſteſſo giro, che rimane ſotto la coclea più in là del punto M.

242. Ed in vero, con avere la coclea una tal condizione, di già ſi vede, che l'acque intromeſſe in eſſa colla prima rivoluzione, non poſſano uſcire fuori nel mentre, che l'orificio inferiore portaſi dal punto ſupremo F per ſino al punto B. Ma, per eſſere la porzione del primo giro BM piena di aere, chiaro ancora ſi è, che le medeſime acque neppure poſſano uſcire, quantevolte lo ſteſſo orificio colla ſeconda rivoluzione portaſi per dentro dell'acque dal punto B per ſino al punto più baſſo E. Dunque, con continuarſi queſt'altra rivoluzione dal punto E per ſino al punto C, entreranno in eſſa nuove acque ſenza perdita delle pri-

prime. E poichè lo stesso dee avvenire in ogn'altra rivoluzione della coclea; perciò, siccome ella si riempirà sempre più di altre acque, senza perderne giammai porzione; così tra l'acque, che successivamente in esse s'intromettono, si framezzeranno altrettante porzioni d'aere, le quali serviranno, non solo per farle entrare, ma eziandio per sostenerle nella stessa coclea.

243. Per definire intanto la posizione del punto M, prendasi primieramente presso di esso la porzione del giro infinitamente piccola MN, dai di cui termini M, ed N tirinsi le rette cilindriche MO, NR, che s'incontrino colla circonferenza della base ne' punti O, ed R. Si abbassi di poi sulla BC la perpendicolare MP, e facciasi così lo OS parallela alla MN, come la RQ parallela alla CB. Essendo adunque il punto M del primo giro il più elevato di tutti, sarà parallela alla suprema superficie dell'acque, tanto la MN, quanto la OS; e perciò, se dalli tre punti O, R, S intendansi abbassate sulla stessa superficie altrettante perpendicolari, sarà la differenza delle due prime eguale alla differenza delle due ultime. Ma la OQ sta alla prima differenza, come il raggio al seno secondo dell'angolo, che ci addita l'inclinazione della coclea; e la seconda differenza sta alla RS, come il seno primo dello stesso angolo al raggio. Dunque, perturbando, la OQ sarà alla RS, come il seno primo del sudetto angolo al suo seno secondo, o pure come la sua tangente al raggio.

244. Attenta poi la proprietà della tangente del cerchio, chiaro si è, che OQ sia ad OR, come il seno dell'arco FO al raggio. Onde, essendo OQ ad OR in ragion composta di OQ ad RS, e di RS ad OR; ancora il seno dell'arco FO sarà al raggio in questa stessa ragion composta. Ma di già è stato dimostrato, che OQ sia ad RS, come la tangente dell'angolo, che ci addita l'inclinazione della coclea al raggio. Ed in oltre RS sta ad OR, come la distanza di due giri vicini all'

all'intera circonferenza della base, o pure come il raggio alla tangente dell'angolo, che forma la *Fig.* 11. spirale colle rette cilindriche. Dunque il seno dell' arco FO sarà al raggio nella semplice ragione della tangente di quel primo angolo alla tangente di quest'altro; ed in conseguenza, se facciasi come la tangente dell'angolo, con cui serpeggia la spirale intorno al cilindro, alla tangente di quello, che ci addita l'inclinazione della coclea, così il raggio ad un'altro numero, con esso si avrà il seno dell' arco FO, che ci determina la posizione del punto M.

245. Or siccome colla seconda rivoluzione ritiene la coclea tutte l'acque, che s'intromettono in essa colla prima, quantevolte ritrovandosi in C l'orificio inferiore, si mantengono tutte più in là del punto M; così egli è facile il dimostrare, che debba ella ritenerle, sempre quando l'arco FO, per mezzo di cui determinasi il punto M, non è maggiore dell'arco BF, ovvero CF. Tirisi perciò per quel punto M un piano, che sia parallelo alla suprema superficie dell'acque; e si consideri la porzione del primo giro, che rimane sotto di esso più in là del punto M, ritrovandosi in C l'orificio inferiore. Non essendo adunque l'arco FO maggiore dell'arco BF, neppure quella porzione sarà minore dell'altra, che rimane immersa nell' acque, ritrovandosi in C lo stesso orificio. Onde, conforme quella stessa porzione ha bastante capacità per contenere l'acque, di cui quest'altra si riempie; così la coclea, aggirandosi di nuovo, riterrà tutte l'acque, che si sono intromesse in essa colla prima rivoluzione.

246. Per lo contrario poi, essendo l'arco FO maggiore dell'arco BF, sarà la porzione del primo giro, che rimane sotto del piano tirato più in là del punto M, minore dell'altra, che s'immerge nell'acque. Onde, non potendo quella porzione contenere tutte l'acque, di cui quest'altra si riempie; per necessità la coclea, con aggirarsi di nuovo, manderà fuori quella parte di esse, che

ci addita la differenza delle due porzioni. Fallisce intanto questa regola, se la coclea si situi in modo, che resti immersa nell'acque l'intera sua base; poichè l'esperienza stessa ci apprende, che colla seconda rivoluzione ella manda fuori tutte l'acque, che s'intromettono in essa colla prima. Ma egli è facile ad intenderne la ragione, e si è, perchè colla totale immersione della base l'acque intromesse nella coclea non possono col loro peso entrare più in dentro; onde per mancanza di aere, che le sostenga, debbono tutte uscire fuori, con aggirarsi di nuovo la coclea.

247. Per potersi adunque ritenere dalla coclea tutte l'acque, che riceve in ciascuna sua rivoluzione, non solo dee rimanere fuori dell'acque una qualche porzione della sua base, come BFC; ma bisogna altresì, che l'arco FO, per mezzo di cui determinasi il riferito punto M, non sia maggiore dell'arco BF, ovvero CF. E poichè torna conto, che in ogni rivoluzione s'intrometti nella coclea la maggior copia d'acque, che sia possibile; perciò giova situare la coclea in modo, che i due archi FO, BF faccianfi tra di essi eguali; poichè colla loro uguaglianza si faranno eguali altresì le due riferite porzioni del primo giro. Onde, attento quel tanto è stato dimostrato intorno all'arco FO, si determinerà la porzione della base BFC, che dee rimanere fuori dell'acque, se facciasi, che il diametro EF sia alla sua corda BC, come la tangente dell'angolo, che forma la spirale colle rette cilindriche, alla tangente di quello, che ci addita l'inclinazione della coclea.

Fig. 11.

248. Del rimanente, conforme la coclea dee inclinarsi sulla suprema superficie dell'acque in modo, che possa aggirarsi intorno al suo asse da una forza esterna; così bisogna, che ella abbia bastante base per rapporto all'altezza, a cui colla sua inclinazione elevasi su di quella superficie: come di fatto i Pratici, seguendo la regola dataci da Vitruvio, sogliono inclinarla in modo, che la base sia all'altezza, come 4 a 3. Con inclinarla intanto

tanto in questa guisa, conforme la stessa base dee essere alla lunghezza della coclea, come 4 a 5; così si determinerà l'angolo della sua inclinazione, primieramente con fare, come 4 a 3, così il raggio ad un'altro numero; ed indi con ritrovare nel canone trigonometrico l'angolo acuto, a cui quest'altro numero rapportasi come tangente. Onde secondo questa pratica l'angolo, con cui inclinasi la coclea sulla suprema superficie dell'acque, dovrà essere presso a poco di gradi 36, e minuti 52.

249. Per quanto poi all'angolo, che forma la spirale colle rette cilindriche; di già è stato avvertito, che egli debba esser maggiore di quello, che ci addita l'inclinazione della coclea. Ma non perciò dee farsi maggiore di esso ad arbitrio; poichè, siccome con aumentare il riferito angolo, si diminuisce per lo contrario la distanza tra i giri della coclea; così colla diminuzione di detti giri aumentasi il loro numero, ed in conseguenza diventa la coclea di maggior peso. Nè vale il dire, che quanto è maggiore il divario tra il riferito angolo, e l'altro dell'inclinazione della coclea, tanto maggiormente si aumenta, così la porzione del primo giro, che s'immerge nell'acque, come la copia, che di esse s'intromettono nella coclea in ciascuna rivoluzione. Imperocchè, con diminuirsi la distanza de' giri, si diminuisce altresì la lunghezza di ciascuno di essi; onde la maggior porzione del primo giro, che immergesi nell'acque, non sempre farà, che entri di esse nella coclea copia maggiore.

250. Ed in vero si avrebbe un tal vantaggio, se restando i giri della coclea nella stessa distanza tra esso loro, si rendesse maggiore il divario tra i due riferiti angoli colla diminuzione di quello, con cui inclinasi la coclea sulla suprema superficie dell'acque. Ma convien riflettere, che rimanendo elevata la coclea sulla stessa superficie a minor altezza, quantevolte minorasi l'angolo, che ci addita la sua inclinazione; avrà quel vantag-

gio con se il difetto d'innalzarsi l'acque per mezzo della coclea eziandio ad altezza minore. Siccome adunque non torna conto, minorare di molto l'angolo, con cui inclinasi la coclea sulla suprema superficie dell'acque; così neppure conviene, aumentare di molto l'altro, che forma la spirale colle rette cilindriche. E perciò i Pratici, seguendo parimente la regola dataci da Vitruvio, sogliono fare quest'altro angolo di gradi 45, ed eguale in conseguenza alla metà di un retto: col quale angolo la distanza tra i giri della spirale sarà eguale all'intera circonferenza della base del cilindro.

251 Nella supposizione intanto, che l'angolo, con cui serpeggia la spirale intorno al cilindro, sia di gradi 45, e che l'altro con cui inclinasi la coclea sulla suprema superficie dell'acque, sia di gradi 36, e minuti 52; sarà la tangente del primo di essi alla tangente del secondo presso a poco, come 4 a 3. Onde per conseguire, che in ciascuna sua rivoluzione entri nella coclea la maggior copia di acque, che sia possibile; dovrà ella situarsi in modo sulla suprema loro superficie, che restando fuori di essa la porzione della sua base BFC, sia il diametro EF alla corda BC eziandio, come 4 a 3; e percio, facendosi la corda BC eguale ai tre quarti del diametro EF, sarà la sua metà eguale ai tre quarti del raggio. Ma la metà della corda BC è il seno della metà dell'arco BFC; ed all'incontro l'arco, che ha per seno i tre quarti del raggio, ritrovasi essere nel canone trigonometrico di gradi 48, e minuti 35. Dunque l' intero arco BFC, che dee rimanere fuori dell' acque, sarà di gradi 97, e minuti 10.

XXVII.

XXVIII. §. 131

Della copia d' acque, che entrano nella coclea in ciascuna sua rivoluzione.

252. Rimane a far vedere, come possa determinarsi la copia d'acque, che entrano nella coclea in ciascuna sua rivoluzione. Perciò fingiamo di nuovo, che ritrovandosi in C l'orificio suo inferiore, sia CG la porzione del primo giro, che rimane immersa nell'acque; e siccome questa porzione riempiesi d' acque, quantevolte il suddetto orificio dal punto più basso E portasi fino a C; così la copia di quelle, che intromettonsi nella coclea in ogni sua rivoluzione, dovrà ripetersi dalla capacità della stessa porzione. E poichè tirata dal suo termine G la retta cilindrica GH, che s'incontri colla circonferenza della base nel punto H; rimane determinata la capacità di detta porzione, con determinarsi l'arco CH, a cui ella corrisponde; perciò riducesi il problema a far vedere, come possa definirsi la lunghezza del riferito arco CH, di cui altro non ci è noto, se non se la ragione, che egli serba colla perpendicolare HI abbassata sulla BC. *Fig.* 10.

253. Per ispiegare intanto l'artificio, di cui dee farsi uso per definire la lunghezza dell'arco CH, ci serviremo della coclea prescritta da Vitruvio, in cui secondo è stato avvertito la tangente dell'angolo, che forma la spirale colle rette cilindriche, stà alla tangente dell'altro angolo, con cui inclinasi la coclea sulla suprema superficie dell'acque, come 4 a 3. Ed in primo luogo, dovendo essere l'arco CH alla perpendicolare HI eziandio nella ragione di 4 a 3; possiamo quindi ricavarne, che l'arco CH debba essere maggiore del residuo al quadrante dell'arco CF, o sia della metà di quello, che rimane fuori dell'acque. In fatti, se M sia il centro della base della coclea, e si tiri per esso la MN parallela alla BC; sarà l' arco CN il residuo al quadrante dell' arco CF. Onde, es- *Fig.* 12.

sendo quest' arco CF di 48 gradi, e 35 minuti, sarà il suo residuo CN di gradi 41, e minuti 25; ed in conseguenza, se esprimasi in minuti, così il quadrante FN, come l'arco CN, sarà la loro ragione di 5400 a 2485, o pure di 1080 a 497.

254. Quindi, se intendasi diviso il raggio MN in 100000 parti eguali, conforme il quadrante FN ne contiene di esse 157143, così sarà 72316 il numero di quelle, che contengonsi nell'arco CN. Ma, abbassata sulla BC la perpendicolare NO, questa come eguale al seno dell'arco CN, dee contenerne 66153. Dunque, essendo l'arco CN alla perpendicolare NO, come 72316 a 66153; sarà la loro ragione minore della ragione di 4 a 3, o sia dell'arco CH alla perpendicolare HI. Onde, siccome permutando ancora la ragione dell'arco CN all'arco CH dee essere minore della ragione, che serbano tra esso loro le due NO, HI; così attento il teorema trigonometrico, che l'arco aumentasi in maggior ragione del suo seno, dovrà essere l'arco CH maggiore dell' arco CN: come in fatti, se fosse minore, si sarebbe la perdendicolare HI seno ancora dell' arco CH; e per tanto si aumentarebbe l'arco in minor ragione del suo seno.

255. Possiamo ricavarne in secondo luogo, che il medesimo arco CH debba essere minore dell'arco CE, che è il residuo alla mezza circonferenza dello stesso arco CF. In fatti, essendo l'arco CF, di 48 gradi, e 35 minuti, sarà l'altro CE di gradi 131, e minuti 25; ed in conseguenza, se esprimasi in minuti, così il quadrante FN, come l'arco CE, sarà la loro ragione di 5400 a 7885, o pure di 1080 a 1577. Onde, supponendo il raggio di nuovo diviso in 100000 parti eguali, conforme il quadrante ne contiene di esse 157143, così sarà 229429 il numero di quelle, che contengonsi nell'arco CF. Ma, abbassata sulla BC la perpendicolare EL, questa come eguale al raggio, ed al seno dell' arco CO uniti insieme, dee contenerne 166153. Dunque l'arco EC sarà alla perpendicolare EL, come 229429 a 166153.

256.

256. Or non v' ha dubio, che la ragione di 219429 a 166153 sia maggiore della ragione di 4 a 3. Dunque l'arco CE alla perpendicolare EL avrà maggior ragione, che l'arco CH alla perpendicolare HI; ed in conseguenza permutando ancora la ragione dei due archi CE, CH, sarà maggiore della ragione, che serbano tra loro le due EL, HI. Ma la EL, come porzione del diametro EF, è maggiore non solo della HI, ma di ogn'altra perpendicolare, che dall'arco BEC si abbassa sulla BC. Dunque, essendo la ragione delle due EL, HI di maggior disuguaglianza, tanto maggiormente dovrà essere di questa indole la sua ragion maggiore dell'arco CE all'arco CH. E pertanto l'arco CH, conforme si è dimostrato maggiore dell'arco CN, che è il residuo al quadrante dell'arco CF; così al contrario dovrà essere minore dell'arco CE, che è il residuo alla mezza circonferenza dello stesso arco CF.

257. Stabiliti i limiti, tra li quali ritrovasi l'arco CH, egli è facile ora ad intendersi, come per mezzo del canone trigonometrico possa definirsi il riferito arco. In fatti, conforme egli è la somma dei due CN, NH, così la perpendicolare HI è la somma dei loro seni IK, KH. Onde, dovendo essere CH ad HI, come 4 a 3; chiaro si è, che di quanto i tre quarti dell'arco CN sono minori del suo seno IK, di altretanto i tre quarti dell'altro NH debbano esser maggiori del seno suo KH. Ma nella supposizione, di esser diviso il raggio in 100000 parti eguali, di gia si è veduto, che ne contenga di esse 72316 l' arco CN, e 66153 il suo seno IK. Dunque, dovendone contenere 54237 i tre quarti dello stesso arco, saranno i medesimi minori del seno IK in 11916 delle stesse parti; e pertanto non dovrà farsi altra cosa, se non se ritrovare nel canone trigonometrico un'arco, i di cui tre quarti siano maggiori del suo seno in tante parti del raggio, quante ne disegna il numero 11916.

258. Per agevolare intanto la ricerca di quest'ar-

co, giova riflettere a quattro cose. La prima si è, che dovendo i tre quarti di esso superare il suo seno in tante parti del raggio, quante ne disegna il numero 11916; per necessità l'arco intero debba esprimersi per un numero magiore di quello, che si hà, aumentando 11916 della sua terza parte. L'altra si è, che attenta quell' espressione dell' arco intero, sia necessario altresì, che il suo seno sia espresso nel canone trigonometrico con cinque note, cioè con una nota meno del raggio. La terza si è, che contenendo l'arco di un grado tante parti del raggio, quante ne disegna il numero 1746, debbano i suoi tre quarti contenerne quasi 1309. E l'ultima si è, che se mai l'arco ricercato sia espresso con soli gradi, senz' aggiunta di minuti, si avranno presso a poco i suoi tre quarti, con moltiplicare il numero de' suoi gradi per 1309.

259. Or con questi avvertimenti niente ora è egli più facile, quanto di ritrovare nel canone trigonometrico l'arco, di cui si ha bisogno; ed ecco come. Percorransi primieramente gli archi espressi con soli gradi, e veggasi tra di essi quale sia quell'arco, che con moltiplicare i suoi gradi per 13, e con minorare il prodotto di 110, ci dà un numero espresso talmente con tre note, che le prime due siano le stesse colle due prime del suo seno; e colla determinazione di quest' arco di già avremo i gradi contenuti nell'arco, che si dimanda. Onde, facendo uso di questa regola, ritroveremo quasi in un subito, che nell'arco ricercato debbansi contenere gradi 85. Imperocche, siccome moltiplicando 85 per 13, e minorando il prodotto 1005 di 110, si hà il numero 995; così le prime due note di questo numero sono le stesse colle prime due del seno 99619, che rapportasi all'arco di 85 gradi.

260. Per quanto poi ai minuti, che possono contenersi nell'arco ricercato; veggasi primieramente, quale sia il divario, che si ha coll'arco di 85 gradi; e per mezzo di esso si determinerà presso a poco il numero de' minuti, che debbonsi aggiungere allo stesso arco. In fatti, contenendo l'arco di 85 gradi tante parti del raggio, quante

ne

ne disegna il numero 148413, i suoi tre quarti ne conteneranno 111310. Onde, siccome questo numero supera il seno dello stesso arco 99619, non già in 11916, ma in 11691, così il divario consiste in 225 parti del raggio. Ma di già è stato avvertito, che i tre quarti dell'arco di un grado, o sia di 60 minuti, contengono delle stesse parti 1309. Dunque, se facciasi come 1309 a 225, così 60 ad un'altro numero; si ritroverà, che il divario debba ripetersi presso a poco da un'arco di 10 minuti; e pertanto l'arco, che si dimanda, sarà di gradi 85, e minuti 10.

261. Dei due archi adunque CN, NH, che uniti insieme compongono l'arco CH, siccome il primo CN è di gradi 41, e minuti 25; così l'altro NH è di gradi 85, e minuti 10. Onde, facendosi l'arco CH di gradi 126, e minuti 35: sarà egli alla circonferenza intera, come 7595 a 21600, o pure come 1519 a 4320. Or secondo è stato avvertito in questa stessa ragione des essere altresì, la porzione del primo giro, che riempiesi d'acque in ciascuna rivoluzione della coclea, al giro intero. Ondese, se determinisi la capacità del giro intero, e facciasi come 4320 a 1519, così la capacità determinata ad un'altra; con essa si avrà la capacità della riferita porzione, la quale in conseguenza ci darà la copia d'acque, che entrano nella coclea in ogni sua rivoluzione. E per quanto alla capacità del giro intero, ella si determinerà, con moltiplicare l'ampiezza del suo orificio per la lunghezza centrale dello stesso giro.

262. Perciò si vuol'avvertire, che così nel primo giro della coclea, come in ogn'altro suo giro, debbonsi distinguere tre lunghezze: cioè l'interiore, con cui addattasi il giro sulla spirale segnata nel cilindro; l'esteriore, che si oppone diametralmente alla lunghezza interiore; e la centrale, che passa per gli centri delle sezzioni circolari fatte nello stesso giro. Or, sebbene queste tre lunghezze siano parallele tra esso loro; nientedimeno per la curvatura del giro le medesime sono talmente disuguali,

fuguali, che ficcome la minima di effe è l'interiore, e la maffima l'efteriore; così la centrale differifce da ambedue in modo, che di quanto è maggiore della prima, di altrettanto è minore dell' altra. Onde la vera lunghezza del giro fi è la centrale; e perciò ad efempio dell' anello circolare dovrà definirfi la capacità dello fteffo giro, con moltiplicare l'ampiezza del fuo orificio per la fua lunghezza centrale.

263. Anzi con queft' occafione fi vuol' ancora avvertire, che febbene fiafi ragionato fin' ora della coclea in modo, come fe ella confifteffe nella femplice fpirale fegnata su'l cilindro; nientedimeno, per definire la fua indole, debba tenerfi conto, non già di quefta fpirale, ma di quella, che avendofi colla lunghezza centrale della coclea, ferpeggia intorno ad un cilindro ideale, in cui il raggio della bafe terminafi al centro dell' orificio della fteffa coclea. E poichè le tangenti degli angoli, che formano le due fpirali colle loro rette cilindriche, fono tra effo loro, come i perimetri delle bafi de' loro cilindri; perciò, qualunque dei due fia dato, potrà determinarfi facilmente eziandio l'altro. In tanto, fe per fiffare il tubo, che del avvolgerfi intorno al cilindro, facciafi nello fteffo cilindro un canale capace di contenerlo per fino alla fua lunghezza centrale, come per altro conviene fare; in tal cafo la fpirale ideale farà la fteffa con quella, che fegnafi su'l cilindro, prima d' ifcavare in effo il riferito canale.

264. Del rimanente, febbene l'acque per mezzo della coclea d'Archimede non poffano follevarfi ad altra altezza, fe non fe a quella, a cui elevafi la fteffa coclea fulla fuprema loro fuperficie; nientedimeno, fe dopo efferfi follevate a queft' altezza, pongafi ivi un'altra coclea in modo, che poffano intrometterfi in effa le fteffe acque; chiaro fi è, che per mezzo di queft'altra coclea fi folleveranno le medefime ad altezza maggiore: dimodochè, con moltiplicare fempre più le coclee, potranno

tranno elevarsi a qualsisia altezza. Qualora poi l'acque, che debbonsi sollevare ad altezza maggiore, corrono per un qualche alveo; potrà farsi uso dello stesso loro moto, per aggirare la coclea, con cui si sollevano. Ed in questo caso, conforme la coclea dee situarsi in modo, che si aggiri intorno al suo asse con direzzione contraria a quella, con cui corrono l'acque; così si aggirerà la coclea, con adattare ad essa una ruota, sulli di cui raggi cadano l'acque correnti con velocità proporzionata per aggirarla.

~~XXIX.~~ §.IV

Della forza, con cui l'acque correnti percuotono i corpi, colli quali s'incontrano.

265. IL frequente uso, che si fa dell'acque correnti, per aggirare le ruote, così delle coclee, per mezzo di cui esse si elevano ad altezza maggiore, come di altre machine, delle quali ci serviamo per gli bisogni della vita civile; ci dà motivo ora di ragionare della forza, con cui l'acque correnti percuotono i corpi, colli quali s'incontrano. Ed in vero non è egli da porsi in dubio, che debba ripetersi la suddetta forza dal moto stesso, con cui è percosso il corpo dall'acque correnti. Quindi, attenta la maniera di definire la quantità di qualsisia moto, chiaro si è, che per giudicare di essa a dovere, debba esserci nota, così la velocità, con cui l'acque percuotono il corpo, come la copia di quelle, che effettivamente lo percuotono. Onde in quest'argomento due sono le principali ricerche da farsi, di cui una riguarda la velocità, e l'altra la copia d'acque, da cui deriva la percossa, che riceve il corpo.

266. Ed in primo luogo, per quanto alla velocità, con cui l'acque correnti percuotono il corpo; rendesi ella a noi nota per mezzo dell'altezza, da cui cadono l'acque per rapporto allo stesso corpo. In fatti, con definire quest'altezza, sapremo la ragione, che ha con essa l'altra altezza

di

16

di quindici piedi con una dodicesima parte di più. Ma nella sudduplicata di questa ragione debbono essere le velocità, che acquistansi cadendo per quelle due altezze. Dunque neppure ignoreremo la ragione, in cui sono tra esso loro queste due velocità. Onde colla conoscenza, che abbiamo della prima di esse, la quale nel tempo di una seconda fa percorrere eguabilmente un spazio duplo dell' altezza, per cui si acquista, verremo in cognizione altresì dell' altra, che è la velocità, con cui l'acque correnti percuotono il corpo, col quale s'incontrano.

267. Per quanto poi alla copia d'acque, che effettivamente percuotono il corpo; questa dee ripetersi, così dalla superficie, che oppone il corpo al moto dell'acque, come dalla velocità, con cui le stesse acque s'incontrano con quella superficie. In fatti, per quanto siasi piccola la porzione di tempo, che impiegasi dall'acque in percuotere il corpo, sempre sarà ella di qualche durata; e perciò dovrà ascriversi la percossa, che riceve il corpo, a tutte quell'acque, che nella di lei durata sono arrestate dall'opposta superficie del corpo. Onde, siccome la quantità di esse si fa maggiore, o minore, non solo per la maggiore, o minore ampiezza della riferita superficie, che le arresta, ma eziandio per la maggiore, o minore velocità, con cui l' acque s' incontrano colla stessa superficie; così da questi due fonti dovrà ripetersi la copia d'acque, da cui effettivamente si percuote il corpo.

268. Essendo così, egli è facile ora il dimostrare, che debba derivarsi la forza, con cui è percosso un corpo dall'acque correnti, così dalla superficie, che oppone il corpo al moto di esse, come dal quadrato della loro velocità. In fatti, secondo è stato avvertito, dee giudicarsi della suddetta forza, non solo per la velocità, con cui l'acque percuotono il corpo, ma eziandio per la copia di quelle, che effettivamente lo percuotono. Ma di già si è fatto vedere, che dipende questa

queſta copia, tanto dalla ſuperficie, che oppone il corpo al moto dell'acque, quanto dalla velocità, con cui le ſteſſe acque s'incontrano con quella ſuperficie. Dunque, dovendoſi tener conto due volte della velocità, dovrà dedurſi la forza, con cui percuoteſi un corpo dall'acque correnti, così dall'oppoſta ſua ſuperficie, come dal quadrato della loro velocità.

269. Conforme poi la percoſſa, che riceve il corpo, corriſponde in proporzione alla forza, da cui deriva; così eſſa parimente dovrà dedurſi, e dalla ſuperficie, che oppone il corpo al moto dell' acque, e dal quadrato della velocità, con cui s'incontrano l'acque col corpo; e perciò le percoſſe, che ſoffrono due corpi, ſaranno tra eſſo loro in ragion compoſta della ſemplice delle ſuperficie, con cui le ricevono, e della duplicata delle velocità, con cui ſi fanno le loro percoſſe. Ma, ſiccome da ciò ricavaſi, che le ſteſſe percoſſe debbano eſſere nella ſola ſemplice ragione delle ſuperficie, eſſendo eguali le velocità; e nella ſola duplicata ragione delle velocità, eſſendo eguali le ſuperficie: così poſſiamo altresì dedurne, che i due corpi debbano ricevere percoſſe eguali, ſempre quando, o ſono eguali, tanto le ſuperficie, quanto le velocità; o pure le ſuperficie ſono nella reciproca duplicata ragione delle velocità.

270. Si vuol però quì notare, che tutto ciò dee intenderſi de' corpi, che ſono direttamente percoſſi dall'acque correnti. Imperocche, ſe mai l'acque percuoteſſero obliquamente i corpi, in tal caſo per ragion dell' obliquità ſi minorerebbe la percoſſa, che riceve ciaſcuno di eſſi. Egli è facile intanto ad intenderſi, che la percoſſa diretta debba eſſere alla percoſſa obliqua, come il raggio al ſeno dell'angolo, che miſura l'obliquità della percoſſa. Onde le percoſſe oblique, che ſoffrono due corpi, ſaranno tra eſſo loro in ragion compoſta, della ſemplice delle ſuperficie, che oppongono i corpi al moto dell' acque; della ſemplice altresì de' ſeni degli angoli, che miſurano

le

le loro obliquità ; e della duplicata delle velocità, con cui si fanno le loro percosse : dal quale teorema generale, secondo il metodo, che da noi si pratica, egli è facile di ricavarne moltissimi altri speciali.

271. Ma senza trattenerci nell'enumerazione di essi, più tosto egli è da riflettersi, che gli enunciati teoremi debbono aver luogo eziandio nelle percosse, che soffrono i corpi coll'incontro di ogn'altro fluido. Imperocchè, siccome tanto la forza, con cui qualsisia fluido percuote un corpo, quanto la percossa, che riceve il corpo con quella forza, deriva parimente, non solo dalla velocità del fluido, ma altresì da quella copia di esso, che effettivamente percuote il corpo ; così ancora quella copia dee ripetersi, e dalla superficie, che oppone il corpo al moto del fluido, e dalla velocità, con cui il fluido s'incontra col corpo. Onde, conforme le percosse dirette, che ricevono due corpi da qualunque fluido, debbono essere parimente in ragion composta della semplice delle superficie, e della duplicata delle velocità ; così le percosse oblique saranno eziandio in ragion composta della semplice delle superficie, della semplice de' seni delle loro obliquità, e della duplicata delle velocità.

272. Intanto, se si vogliano paragonare tra esso loro le percosse, che ricevono due corpi coll' incontro di due diversi fluidi ; dovrà tenersi conto altresì delle densità degli stessi fluidi. E ciò per la ragione, che quelle porzioni di essi, che effettivamente percuotono i corpi, debbono ripetersi in questo caso, non solo dall'opposte superficie dei due corpi, e dalle velocità dei due fluidi, ma eziandio dalle diverse loro densità. Onde, se i corpi siano percossi direttamente dai due fluidi, saranno le loro percosse in ragion composta della semplice delle superficie opposte dai corpi, della semplice altresì delle densità de' fluidi, e della duplicata delle loro velocità. Ma, se le percosse, che ricevono i corpi dai due fluidi, siano oblique ; in

tal

tal caſo ſi componerà la loro ragione della ſemplice delle ſuperficie oppoſte da' corpi, della ſemplice de' ſeni delle loro obliquità, della ſemplice delle denſità de' fluidi, e della duplicata delle loro velocità.

273. Del rimanente, ſiccome ſi è ragionato della forza, con cui l'acque correnti percuotono i corpi, coi quali s'incontrano, per l'uſo frequente, che ſi fa di eſſe in aggirare le ruote di varie machine; così, per farne ora l'applicazione alle ſteſſe ruote, di già ſi sà, che ſulli loro raggi ſi laſciano cadere l'acque da una qualche altezza, e che colla percoſſa, che eſſi ricevono, aggiranſi le ruote intorno ai loro centri. Quindi la percoſſa, che ſoffrono i raggi della ruota, attente le coſe dimoſtrate, dee ripeterſi da tre fonti: cioè dalla ſuperficie, che oppongono i raggi alla caduta dell'acque, li quali perciò formanſi a guiſa di palette; dall'altezza, da cui cadono l'acque, la quale corriſponde in proporzione al quadrato della loro velocità; e dal ſeno dell'angolo, che ci addita l'obliquità della percoſſa. Onde le percoſſe, che ſoffrono i raggi di due diverſe ruote, saranno tra eſſo loro in ragion compoſta delle ſuperficie, che oppongono i raggi alla caduta dell'acque; dell'altezze, da cui cadono le ſteſſe acque; e dei ſeni degli angoli, che ci additano l'obliquità delle ſteſſe percoſſe.

274. Conforme poi la percoſſa, che ricevono i raggi della ruota dall'acque cadenti, dee riguardarſi come la potenza, che applicata agli ſteſſi raggi aggira la ruota intorno al ſuo centro; così, per giudicare della ſua attività, o ſia momento, dee tenerſi conto altresì della lunghezza, che ritrovenſi avere i raggi della ſteſſa ruota. Onde i momenti delle forze, con cui l'acque cadenti aggirano intorno ai loro centri due ruote diverſe, saranno tra eſſo loro in ragion compoſta delle lunghezze, che ritrovanſi avere i raggi delle due ruote; delle ſuperficie, che oppongono gli ſteſſi raggi alla caduta dell'acque; dell'altezze, da cui ca-

cadono le stesse acque; e de' seni degli angoli, che ci additano l'obliquità delle percosse, che soffrono i raggi delle due ruote: dal quale teorema generale, facendosi uso del solito nostro metodo, possono facilmente dedursi tutti gli altri speciali, che riguardano i momenti delle stesse forze.

~~XXX.~~ §. IV.

Del moto circolare dell'acque, derivato dalla rivoluzione di un vase cilindrico.

275. PEr non tralasciare cosa veruna, che meriti di esser posta ad esame, ragioneremo finalmente del moto circolare dell'acque. Perciò immaginiamoci un vase di figura cilindrica, che non sia interamente pieno di acque, ma ne contenga di esse una qualche quantità ~~per~~ fino ad un certo termine della sua altezza; e fingiamo ancora, che il medesimo vase, con aggirarsi egualmente intorno al suo asse, porti in giro eziandio l'acque, che contiene. Intendansi divise le stesse acque in strati infinitamente piccoli, li quali siano paralleli, non già al fondo del vase, ma alla sua superficie cilindrica. E poichè questi piccoli strati cilindrici, per ragion del loro peso, ritrovansi quasi uniti colle parti del fondo, a cui corrispondono; chiaro si è, che i medesimi incominceranno ad aggirarsi colle velocità di quelle stesse parti; onde le velocità iniziali delli riferiti piccoli strati saranno tra esso loro, come le loro distanze dall'asse del vase.

276. Or, siccome queste loro velocità iniziali colla continuata rivoluzione del vase aumentansi sempre più nella stessa ragione; così col loro aumento i piccoli strati si disgiungeranno non solo dalle corrispondenti parti del fondo, ma eziandio tra esso loro; e perciò si aggireranno finalmente in modo, che ciascuno di essi farà la sua rivoluzione independentemente, tanto dal vase, quanto dai suoi contigui. E poichè, con aggirarsi in questa guisa, puo avvenire facilmente, che si alteri

la

la ragione delle loro velocità; perciò nel moto circolare dell'acque, derivato dalla rivouzione di un vase cilindrico, la prima ricerca da farsi si è di vedere, come siano le velocità, con cui aggiransi i loro piccoli strati cilindrici, per rapporto alle distanze degli stessi strati dall'asse del vase.

277. Ed in vero, se si potesse determinare, come per rapporto a queste distanze siano i tempi, che impiegano i piccoli strati in fare le loro rivoluzioni; niente sarebbe più facile, quanto di definire, come siano le loro velocità per rapporto alle stesse distanze. In fatti, aggirandosi i piccoli strati con moto eguabile, ed uniforme; chiaro si è, che le loro velocità debbano essere in ragion composta della diretta delle circonferenze de' cerchi, che descrivono, e della reciproca de' loro tempi periodici. Ma le riferite circonferenze sono nella stessa ragione coi loro raggi, li quali raggi sono le distanze dei piccoli strati dall'asse del vase. Dunque le stesse velocità saranno tra esso loro in ragion composta della diretta delle distanze, e della reciproca de' tempi periodici; ed in conseguenza, con conoscersi il rapporto tra i tempi periodici, e le distanze, si verrà in cognizione altresì dell'altro rapporro tra le velocità, e le stesse distanze.

278. In effetto, conforme essendo i tempi periodici nella duplicata ragione delle distanze, debbono essere le velocità nella semplice reciproca loro ragione; così, se mai i tempi periodici siano nella sudduplicata ragione delle distanze, eziandio le velocità saranno nella stessa loro sudduplicata ragione. E così parimente, siccome essendo i tempi periodici nella triplicata ragione delle distanze, debbono essere le velocità nella duplicata reciproca loro ragione; così, se mai i tempi periodici siano nella subtriplicata ragione delle distanze, saranno le velocità nella subtriplicata ragione de' loro quadrati. Ed infine, conforme essendo i tempi periodici nella sesquiplicata ragione delle distanze, debbono essere le velocità nella reciproca sudduplicata loro ragione; così, se mai i tempi perio-

dici ſiano nella ſubtriplicata ragione de' quadrati delle diſtanze, ſaranno le velocità nella ſubtriplicata ragione delle diſtanze ſemplici.

279. Intanto non è egli così facile, di fare eſperimenti valevoli a definire la ragione, in cui ſono i tempi periodici per rapporto alle riferite diſtanze. Imperocchè, ſebbene con ſituare nell'acque piccoli galleggianti in diverſe diſtanze dall'aſſe del vaſe, debbano ancora eſſi portarſi in giro colla rivoluzione dell'acque, in cui galleggiano; nientedimeno, ſiccome l'acque con aggirarſi ſi sforzano di diſcoſtarſi dall'aſſe delle loro rivoluzioni, così le medeſime con queſto sforzo ſpingeranno i galleggianti verſo lo ſteſſo aſſe, li quali perciò con portarſi in giro deſcriveranno una ſpirale, e non già una circonferenza di cerchio. Ed abbenchè per mezzo di queſta ſpirale, ſe mai ci foſſe nota la ſua indole, potrebbe venirſi in cognizione, così della ragione, in cui ſono gli sforzi centrifugi delli diverſi ſtrati dell'acque, come dell'altra, che ſerbano tra eſſo loro le velocità degli ſteſſi ſtrati; pure tutta volta rieſce difficile di fare eſperimenti, per definire con eſattezza l'indole della riferita ſpirale.

280. Per mezzo della forma, che prende nel vaſe la ſuprema ſuperficie dell'acque, ſi potrebbe altresì definire, come ſiano le velocità, con cui aggiranſi i diverſi loro ſtrati intorno all'aſſe del vaſe, per rapporto alle diſtanze degli ſteſſi ſtrati dal medeſimo aſſe. Perciò convien riflettere, che l'acque con aggirarſi intorno a quell'aſſe, non ſolo fanno sforzo per diſcoſtarſene; ma, attenta la loro fluidità, effettivamente ſe ne diſcoſtano, per quanto permette la loro gravità. Quindi, ſiccome le medeſime debbono elevarſi verſo i lati del vaſe, e deprimerſi in conſeguenza verſo l'aſſe; così la ſuprema loro ſuperficie dovrà incurvarſi in modo, che elevandoſi lateralmente ſi deprimerà ſempre più verſo il ſuo punto di mezzo. Onde, ſe mai ſia nota l'indole della curva, colla di cui rivoluzione intorno all'aſſe del vaſe generaſi la ſud-

detta

detta superficie, facilmente per mezzo di essa potrà venirsi in cognizione del rapporto tra le velocità degli strati, e le loro distanze dal riferito asse.

281. Si ha bisogno intanto di due teoremi. Il primo si è, che muovendosi un corpo circolarmente colla velocità, che acquistasi colla caduta per un'altezza eguale alla metà della sua distanza dal centro del moto, siano eguali tra esso loro la sua gravità, ed il suo sforzo centrifugo. Per dimostrarlo, sia AMB la circonferenza del cerchio descritta dal corpo intorno al centro C; ed essendo AM un' archetto infinitamente piccolo, si abbassi su 'l diametro AB la perpendicolare MN. Poichè dunque il riferito archetto non differisce dalla sua corda, saranno le tre AB, AM, AN continuamente proporzionali tra esso loro; e pertanto AB sarà ad AN, come il quadrato di AB al quadrato di AM. Ma, essendo AD la metà del raggio AC, o sia della distanza del corpo dal centro, AD sta ad AB, come il quadrato di AC al quadrato di AB. Dunque ordinando sarà, come AD ad AN, così il quadrato di AC al quadrato di AM; ed in conseguenza le due AC, AM saranno nella sudduplicata ragione dell'altre due AD, AN.

Fig. 13.

282. Quindi, essendo i tempi della caduta per le due AD, AN nella sudduplicata loro ragione, saranno i medesimi tempi tra esso loro nella semplice ragione di AC ad AM. Ma nel tempo della caduta per la AD colla velocità acquistata dee percorrersi equabilmente il duplo della stessa AD; e la velocità, con cui aggirasi il corpo, è quella, che acquistasi colla caduta per la AD. Dunque il tempo di questa caduta sta al tempo, in cui si percorre dal corpo l'archetto AM, eziandio nella semplice ragione di AC ad AM; ed in conseguenza il tempo della caduta per la AN, ed il tempo della rivoluzione per l'archetto AM saranno eguali tra esso loro. Conforme poi nel primo di questi due tempi percorre il corpo colla sua gravità lo spazietto AN; così nell'altro tempo col

suo sforzo centrifugo dee percorrere lo stesso spazietto. Onde la gravità del corpo, ed il suo sforzo centrifugo in tempi eguali producono effetti eziandio eguali; e per tanto, dovendosi giudicare delle cause per gli effetti, che producono in tempi eguali, sarà la gravità del corpo eguale al suo sforzo centrifugo.

283. L'altro teorema si è, che muovendosi un corpo circolarmente con qualsisia data valocità; il suo sforzo centrifugo sia alla sua gravità, come l'altezza, per cui cadendo si acquista la velocità del suo moto, alla metà della sua distanza dal centro. Per dimostrarlo, muovasi il corpo per la circonferenza AMB colla velocità acquistata per la AE. E paragonando lo sforzo centrifugo di questa sua rivoluzione coll'altro, che si ha, con portarsi il corpo per la stessa circonferenza colla velocità, che acquistasi per la AD; saranno questi due sforzi tra esso loro nella duplicata ragione delle due riferite velocità, o pure nella semplice ragione di AE ad AD. Ma di già si è dimostrato, che qualora portasi il corpo per la circonferenza AMD colla velocità, che acquistasi per la AD, la sua gravità debba essere eguale al suo sforzo centrifugo. Dunque, muovendosi egli per la stessa circonferenza colla velocità acquistata per la AE, sarà lo sforzo suo centrifugo alla sua gravità, come AE ad AD.

284. Premessi questi due teoremi, sia ora AB l'asse del vase, ed AC la curva, colla di cui rivoluzione descrivesi la suprema superficie dell' acque, che si aggirano intorno a quell'asse. Prendasi in questa curva l'archetto infinitamente piccolo MO, cosichè possa egli riguardarsi come porzione della retta MT, che tocca la stessa curva nel punto M; indi dell'acque, che sono in quell'archetto, si disegni lo sforzo centrifugo per l'orizontale MD, e la gravità per la verticale MF. Se adunque sulla tangente MT si abbassino le perpendicolari DE, FG; potrà risolversi così lo sforzo centrifugo MD negli altri due DE, *Fig.* 14.

ME,

ME, come la gravità MF nell' altre due FG, MG. Ma le parti dello sforzo, e della gravità, per cui le riferite acque possono essere rimosse dall'archetto MO, sono le due ME, MG, le quali agiscono con direzioni parallele allo stesso archetto. Dunque, per ragion dell'equilibrio, saranno le due ME, MG eguali tra esso loro; e pertanto lo sforzo centrifugo MD sarà alla gravità MF in ragion composta di MD ad ME, e di MG ad MF.

285. Se poi prolunghisi l'orizontale MD fino a che s'incontri coll'asse AB nel punto N; si avrà il triangolo MNT equiangolo con ciascuno dei due MED, MGF. Ma per questi triangoli eguiangoli dee essere primieramente come MD ad ME, così MT ad NT; ed indi come MG ad MF, così MN ad MT. Dunque lo sforzo centrifugo MD sarà alla gravità MF in ragion composta di MT ad NT, e di MN ad MT, o pure nella semplice ragione di MN ad NT. All'incontro, se MH sia l'altezza, per cui acquistasi cadendo la velocità dell' acque trattenute sull'archetto MO, lo sforzo centrifugo MD dee essere alla gravità MF, come la metà di NM ad MH. Dunque, facendosi come MN ad NT, così la metà della stessa MN ad MH, sarà MH eguale alla metà di NT. Onde, con esser nota l' indole della curva AMC, conforme non s'ignora il rapporto fra la sottotangente NT, e la distanza MN; così neppure ignoreremo l'altro rapporto tra la velocità, che acquistasi colla caduta per la MH, e la stessa distanza MN.

286. Ma egli è quì da notarsi, che nè tampoco posson farsi esperimenti, per definire con esattezza l' indole della curva AMC; e perciò neppure per mezzo di esa puo indagarsi, come siano le velocità delli diversi strati dell'acque per raporto alle distanze dall'asse del vase. Giova intanto, che siasi dimostrato l'attacco, che ella ha colle riferite velocità; poichè almeno si faranno a noi note l'ipotesi, che non sono da riceversi intorno al rapporto tra le velocità, e le distanze

 delli

delli diversi strati dell'acque. In fatti, siccome la suprema superficie dell'acque, che si aggirano, vedesi sensibilmente concava da per tutto; così ancora la sua curva generatrice AMC dovrà esser concava verso il suo asse AB. Onde tutte quelle ipotesi, in cui la suddetta curva diventa convessa verso lo stesso asse, non sono certamente d'ammettersi; e soltanto potrebbe nascere il dubio intorno a quell'ipotesi, in cui la riferita curva cambiasi in linea retta.

~~XXXI.~~ §. VI

Continuazione dello stesso argomento, con esaminare altri casi del riferito moto circolare.

287. NOn essendo egli così facile, di definire per via d'esperimenti, come siano le velocità, con cui aggiransi i diversi strati dell'acque, relativamente alle loro distanze dall'asse del vase; veggiamo ora, se questo rapporto tra le velocità, e le distanze possa determinarsi, con ricorrere all'indole stessa dell'acque. Ed in vero, di già è stato avvertito, che siccome i diversi strati incominciano ad aggirarsi colla rivoluzione stessa del vase cilindrico, che li racchiude; così tanto le loro velocità iniziali, quanto gli aumenti, che susseguentemente ricevono, siano nella stessa ragione colle loro distanze. Or sebbene gli stessi strati, attenta la fluidità dell'acque, debbansi disgiungere, non solo dalle corrispondenti parti del fondo, ma eziandio tra esso loro; nientedimeno, con aggirarsi da per se stessi, e colle proprie loro velocità, non cambiano posizione per rapporto ai loro contigui. Onde, non facendosi stropicciamento veruno tra le loro superficie, senza dubio non dee alterarsi la ragione delle loro velocità.

288. Quindi i diversi strati dell'acque, eziandio disgiunti tra esso loro, si aggireranno intorno all' asse del vase con velocità proporzionali alle loro distan-

distanze da quell'asse; e perciò i tempi, che impiegano in fare le loro rivoluzioni, saranno tra di essi eguali. Ma essendo così, egli è facile ora di determinare la curva, che con aggirarsi intorno allo stesso asse, genera la suprema superficie dell' acque. Imperocchè, siccome le velocità delli diversi strati sono nella semplice ragione delle loro distanze; così l'altezze, per cui cadendo si acquistano quelle velocità, saranno come i quadrati delle stesse distanze. Ma è stato dimostrato, che le riferite altezze siano eguali alle metà delle sottotangenti, che a queste distanze come ordinate corrispondono nella curva. Dunque sarà la curva d'indole tale, che i quadrati delle sue ordinate saranno nella stessa ragione colle sottotangenti corrispondenti; e perciò la stessa curva sarà una parabola.

289. Egli è facile altresì di definire, in qual ragione siano tra esso loro gli sforzi centrifugi, che esercitano colle loro rivoluzioni i diversi strati dell'acque. Imperocchè, secondo il teorema generale altrove da noi dimostrato, debbono essere questi sforzi in ragion composta della duplicata diretta delle velocità, e della reciproca semplice delle distanze. Onde; essendo le velocità nella ragion diretta delle medesime distanze, saranno gli sforzi centrifugi eziandio nella stessa ragione. E da ciò potremo dedurne finalmente l'indole della spirale, che descrive un galleggiante colla rivoluzione dell'acque, e collo sforzo loro centrifugo. *Fig.* 15. Fingiamo perciò, che A sia il galleggiante, ed AMN la spirale, che egli descrive intorno al centro C. Prendasi in questa spirale l'archetto infinitamente piccolo MN; e tirate le rette CM, CN, che s'incontrino colla circonferenza del cerchio descritta col centro C, e coll'intervallo CA ne' punti P, e Q, descrivasi collo stesso centro l'archetto circolare MO.

290. Nel mentre adunque il galleggiante colla rivoluzione dell'acque portasi per l'archetto MO, descriverà egli col loro sforzo centrifugo un spa-

zietto eguale alla NO. Onde nel punto M la velocità dell'acque sarà alla velocità dello sforzo loro centrifugo, come MO ad NO. Ma, per essere queste due velocità in data ragione colla distanza CM, le medesime eziandio tra esso loro debbono essere in data ragione. Dunque sarà data altresì la ragione di MO ad NO. Quindi, essendo MO ad NO, come il raggio alla tangente seconda dell'angolo MNO; sarà data parimente la ragione tra il raggio, e la tangente seconda di quest' angolo. Onde, conforme l'angolo MNO de essere dato, così la spirale AMN, che descriveſi dal galleggiante intorno al centro C, sarà d'indole tale, che s'inclinerà egualmente sulle rette, che tirate dal centro C al suo perimetro possono riguardarsi come suoi raggi.

291. Con descrivere intanto il galleggiante una spirale di questa indole, dovrà egli fare infiniti giri, prima di giungere al centro C. Tirisi perciò l'altro raggio CR in modo, che prolungato sino ad S faccia, che i due archetti PQ, QS siano tra loro eguali, e col centro C descrivasi l'altro archetto circolare NH. Essendo adunque equiangoli i due piccoli triangoli MNO, NRH, sarà come NO ad RH, così MO ad NH. Ma, per gli due settori simili CMO, CNH, come sta MO ad NH, così sta CM a CN. Dunque sarà ancora, come CM a CN, così NO ad RH. Quindi, conforme permutando CM de essere ad NO, come CN ad RH; così dividendo CM sarà a CN, come CN a CR. E poichè la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto, perciò alla spirale AMN, che descrive il galleggiante intorno al centro C, compete quest'altra proprietà, che debba aversi una progressione geometrica decrescente coi suoi raggi, che contengono tra essoloro angoli eguali.

292. Or sebbene in una progressione geometrica decrescente si minorino sempre più i suoi termini; nientedimeno nessuno di essi può diminuirsi in modo, che interamente svanisca. Onde il

il galleggiante, con descrivere la riferita spirale, si avvicinerà sempre più al centro C, ma non mai potrà giungervi. Ed egli è da notarsi, che per distinguere la stessa spirale dall'altra considerata da Archimede, si è dato ad essa da' moderni Geometri il nome di spirale logaritmica, appunto per la proprietà poc'anzi dimostrata, che coi raggi della spirale, li quali contengono tra esso loro angoli eguali, debba aversi una progressione geometrica decrescente: come in fatti da questa proprietà ne segue, che essendo gli archi circolari AP, AQ, AS egualmente differenti tra loro, i medesimi siano logaritmi delli raggi corrispondenti AM, AN, AR, che sono tra di essi continuamente proporzionali.

293. Conforme poi tutto ciò deve aver luogo nell'acque, che aggiransi colla rivoluzione stessa del vase cilindrico, in cui si contengono; così giova quì l'avvertire, non esser' egli necessario, che abbia il vase una tal figura: come in fatti, se la sua figura sia prismatica regolare, pure con aggirarsi egli intorno al suo asse si porteranno in giro le sole acque, che si contengono nel cilindro ideale inscritto dentro dello stesso vase. Deve eccettuarsene intanto il vase sferico, per la ragione, che colla sua rivoluzione intorno al suo asse si aggirano tutte l'acque, che in esso si contengono. E se intendansi divise le stesse acque in piccoli strati, che siano concentrici alla superficie sferica del vase; chiaro si è, che ancora essi, dopo essersi disgiunti tra esso loro, debbano aggirarsi colla stessa legge delli strati distinti nel vase cilindrico, non ostante, che le minime particelle di un medesimo strato portansi in giro con velocità, che essendo proporzionali alle loro distanze dall'asse, sono disuguali tra esso loro.

294. Possono intanto aggirarsi l'acque intorno ad un'asse con diversa legge da quella, che è stata esaminata, ed ecco come. Pongasi in mezzo ad una massa di esse, che sia stagnante, verticalmente un cilindro solido, che si aggiri intor-

no al suo asse con moto eguabile, ed uniforme. E di già non è egli da porsi in dubbio, che questo cilindro colla sua rivoluzione debba scuotere, e portare in giro ad uno ad uno eziandio i piccoli strati dell'acque, che sono paralleli alla sua superficie cilindrica. Ma sebbene le velocità, che generansi in essi coi loro scuotimenti, siano come le loro distanze dall'asse del cilindro; nientedimeno, perchè le rivoluzioni degli stessi strati incominciano a farsi ad una ad una, ciascuno di essi incontrerà della resistenza nelle superficie de' suoi contigui. Onde le loro velocità si diminuiranno proporzionalmente alle resistenze, che incontrano.

295. Or queste resistenze, siccome per l'omogeneità dell'acque sono da per tutto della stessa indole; così saranno tra esso loro, come le superficie, che l'esercitano, o pure come le loro distanze dall'asse del cilindro. Quindi si diminuiranno le riferite velocità nella stessa ragione, in cui si generano; e pertanto, facendosi eguali tra di esse, saranno i tempi periodici, come le distanze. Dovendo poi essere eziandio eguali, così l'altezze, per cui cadendo acquistansi quell'eguali velocità, come le sottotangenti della curva, colla di cui rivoluzione generasi la suprema superficie dell' acque, che si aggirano; sarà questa curva una logaritmica, che avrà per suo asintoto l'asse del cilindro; e per ciò la riferita superficie dovrà essere convessa al di fuori. Ed in fine, per l'uguaglianza delle velocità, con cui aggiransi i diversi strati dell'acque; saranno gli sforzi centrifugi degli stessi strati nella reciproca ragione delle loro distanze dall'asse del cilindro.

296. Se poscia in mezzo all'acque stagnanti pongasi una sfera, che si aggiri eguabilmente intorno al suo asse verticale; ancora questa sfera colla sua rivoluzione porterà in giro ad uno ad uno i piccoli strati dell'acque paralleli, ovvero concentrici alla sua superficie sferica. Ma, attenta l'indole delle superficie, che resistono alle loro rivoluzioni, si diminuiranno le velocità, che si ge-

generano in eſſi colla rivoluzione della ſfera, nella duplicata di quella ragione, con cui ſi generano. Onde, aggirandoſi i diverſi ſtrati con velocità reciprocamente proporzionali alle loro diſtanze dal centro della sfera, ſaranno i tempi periodici, come i quadrati di queſte ſteſſe diſtanze. Dee notarſi intanto, che ſebbene le velocità dei diverſi ſtrati ſiano nella reciproca ragione delle riferite diſtanze; quelle però delle minime particelle di un medeſimo ſtrato ſaranno in ragion compoſta della duplicata reciproca delle diſtanze ſuddette, e della ſemplice diretta dell'altre loro diſtanze dall'aſſe della sfera.

297. Nè però è da porſi in dubio, che le velocità generate nei diverſi ſtrati dell'acque colla rivoluzione dei riferiti corpi, ſiano come le loro diſtanze, o dall'aſſe del cilindro, o pure dal centro della ſfera. Imperocchè, ſcuotendoſi l'acque ſtagnanti colla rivoluzione di que' corpi, come ſe formaſſero con eſſi un tutto continuato; ſaranno le ſcoſſe, che ricevono le minime loro particelle, come le loro diſtanze dall'aſſe del moto. Onde, ſiccome le velocità, che generanſi in eſſe con queſte ſcoſſe, debbono eſſere nella ſteſſa ragione; così le velocità, che ſi ritroveranno avere i piccoli ſtrati formati con quelle particelle, ſaranno come le loro diſtanze, o dall'aſſe del cilindro, o pure dal centro della ſfera. E poichè per lo piccoliſſimo attacco, che ritrovaſi tra le minime particelle dell'acque, le riferite ſcoſſe giungono ad eſſe ſucceſſivamente; quindi ſi è, che le rivoluzioni dei diverſi ſtrati incominciano a farſi, non già unitamente, ma ad una ad una.

298. Del rimanente per poco, che ſi voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che non ſolo la prima, ma eziandio queſt'altre due leggi di rivoluzione debbono aver luogo in ogni fluido omogeneo, che ſi aggiri circolarmente colle ſteſſe circoſtanze. Imperocchè, ſebbene con eſſer il fluido di altra teſſitura, ſiano diverſe altresì le reſiſtenze, che incontrano i ſuoi ſtrati nelle ſuperfi-

cie

cie de' loro contigui; nientedimeno, per l'omogeneità del fluido, fempre quefte refiftenze faranno della fteffa indole per tutta la fua maffa, ed in confeguenza proporzionali alle fuperficie, che l'efercitano. Quefto fteffo intanto puo fervirci di argomento, che le leggi di rivoluzione debbono effer differenti in un fluido eterogeneo, che non è egualmente denfo da pertutto. Imperocche, per le diverfe denfità degli ftrati, che fi aggirano, dovranno ripeterfi le refiftenze, che nelle loro rivoluzioni fcambievolmente fi oppongono, non folo dalle loro fuperficie, ma eziandio dalle diverfe loro denfità.

~~XXXII.~~ §. VII

Digreffione intorno alla figura della terra, fuppofta la fua diurna rivoluzione.

299. Avvertimmo di fopra, che fe mai quefta noftra terra foffe tutta coperta d' acque, e la medefima fi aggiraffe intorno al fuo affe; dovrebbe ella prendere la figura, non già di una sfera, ma di un sferoide allungato verfo l'equatore, e depreffo verfo i poli. Imperocche le parti aquee, con aggirarfi intorno a quell'affe, non folo farebbero sforzo per difcoftarfene; ma, per ragion della loro fluidità, effettivamente fe ne difcoftarebbero. Onde, ficcome i loro sforzi centrifugi farebbero maggiori nelle parte più vicine all'equatore, e minori nell'altre più lontane; così eziandio l allontanamento dall'affe di rivoluzione dovrebbe effere maggiore nelle prime, e minore nelle feconde. Or attento il teorema dimoftrato di fopra intorno alla ragione, che ferbano tra effo loro lo sforzo centrifugo di un corpo, e la fua gravità, egli è facile prefentemente di definire l'indole e la figura sferoidale, che dovrebbe avere quefta noftra terra nella riferita fuppofizione.

Fig. 16. 300. Sia perciò C il centro della terra, BE l'affe della fua diurna rivoluzione, e BAD la cu[rva] che con aggirarfi intorno a quell'affe defcriv[e] [illegible]

sua superficie. Dal centro C si alzi sull'asse BD la perpendicolare CA; e siccome i poli della terra sono i termini dell'asse BD, così il suo equatore sarà il cerchio, che si descrive colla rivoluzione della perpendicolare alzata CA. Si prolunghi poscia la stessa CA talmente fino al punto E, che sia AE l'altezza, per cui acquistasi cadendo la velocità del punto A; e facciasi ancora AF terza proporzionale dopo le due AE, AC. Se adunque da un'altro punto M della curva si abbassi sullo stesso asse l'altra perpendicolare MN, e sia MG l'altezza, per cui acquistasi cadendo la velocità di quest'altro punto M; sarà la ragione delle velocità, con cui aggiransi i due punti A, ed M intorno a quell'asse, eguale così alla semplice delle due AC, MN, come alla suddupl1cata dell'altre due AE, MG; e pertanto AE sarà ad MG, come il quadrato di AC al quadrato di MN.

301. Or, essendo AF terza proporzionale dopo le due AE, AC, sarà il quadrato di AC eguale al rettangolo delle due AE, AF; ed in conseguenza AE sarà ad MG, come il rettangolo delle due AE, AF al quadrato di MN. Ma AE sta ad MG, come il rettangolo delle due AE, AF al rettangolo delle due MG, AF. Dunque il quadrato di MN sarà eguale al rettangolo delle due MG, AF; e perciò, essendo MG ad MN, come MN ad AF, sarà altresì MG alla metà di MN, così MN alla metà di AF: colla quale analogia niente ora è egli più facile, quanto di definire l'indole della curva BAD, colla di cui rivoluzione intorno all' asse BD descrivesi la superficie della terra. Prendasi a tal'effetto in essa l'archetto infinitamente piccolo M*m*, cosichè possa egli riguardarsi come porzione della sua tangente KL; e si disegnino secondo le proprie loro direzzioni per le rette MH, MI lo sforzo centrifugo, e la gravità dell'acque, che ritrovansi nell'archetto M*m*.

302. Se adunque sulla tangente KL si abbassino le perpendicolari HK, IL; potrà risolversi lo sforzo centrifugo MH nei due laterali MK, HK, e

la

la tutta AF nella differenza dell'altre due AC, MC. L'altra si è, che la tutta AF sia alla somma delle due AC, MN, come la loro differenza alla differenza dell'altre due AC, MC. Dal che ne segue in oltre, che si determinerà il punto M corrispondente a qualsisia porzione AP presa nella AC, primieramente con fare, che la AF sia alla somma delle due AC, PC, come la loro differenza AP ad un' altra porzione AR; ed indi con descrivere col centro C, e coll'intervallo della CR l'arco circolare RM, che intersegandosi colla PM alzata perpendicolarmente sulla AP, ci darà il punto ricercato. E poichè l'intersegamento dee farsi in due punti, quindi si è, che ad ogni porzione AP debbano corrispondere nella curva due punti diversi egualmente distanti da P.

305. Supposto poi, come sopra, che le due AE, MG siano l'altezze, per cui acquistansi cadendo le velocità, colle quali aggiransi i due punti A, ed M intorno all'asse BD; possiamo dedurne altresì una terza conseguenza, la quale si è, che la differenza delle due AC, MC sia eguale alla differenza dell'altre due AE, MG. In fatti, essendo continuamente proporzionali, così le tre AE, AC, AF, come le altre tre MG, MN, AF; sarà non meno il quadrato di AC eguale al rettangolo di AF in AE, che il quadrato di MN eguale al rettangolo di AF in MG; ed in conseguenza la differenza tra li quadrati delle due AC, MN sarà eguale al rettangolo di AF nella differenza dell'altre due AE, MG. Ma per l'indole della curva la differenza tra gli stessi quadrati è eguale al rettangolo di AF nella differenza delle due AC, MC. Dunque, dovendo essere eguali tra loro questi due rettangoli, sarà la differenza delle due AC, MC eguale alla differenza dell'altre due AE, MG.

306. E da ciò ricavasi finalmente, che la differenza delle due AC, BC, che sono i semiassi della curva, sia eguale all'intera altezza AE, per cui acquistasi cadendo la velocità del punto A. In fatti,

fatti, essendo nulla la velocità, con cui aggirasi l'altro punto B; sarà nulla altresì l'altezza, per cui si acquista cadendo la sua velocità; e per tanto la differenza tra quest'altezza, e l'altra AE sarà eguale alla stessa AE. Ma a questa differenza dee esser eguale la differenza dei due semiassi AC, BC. Dunque ancora quest'altra differenza sarà eguale all'intera altezza AE. Il che puo dedursi eziandio da ciò, che siccome per avere il punto M corrispondente alla porzione AP, dee prendersi la AR in modo, che AF sia alla somma delle due AC, PC, come la loro differenza AP ad AR; così, dovendosi definire il punto B corrispondente alla tutta AC, bisognerà prendere talmente la AR, che AF sia ad AC, come AC ad AR.

307 Del rimanente, siccome è noto a noi presso a poco, tanto il semiasse AC, che rapportasi come raggio all'equatore terrestre, quanto il tempo, in cui dovrebbe farsi da questa nostra terra la sua diurna rivoluzione; così per mezzo di questi dati niente è egli più facile, quanto di definire la velocità, con cui nella stessa diurna rivoluzione della terra dovrebbe aggirarsi il punto A. Onde, se determinata questa velocità, definiscasi in appresso l'altezza AE; per cui cadendo ella si acquista; chiaro si è, che con diminuire il semiasse maggiore AC di quest'altezza, debba aversi l'altro minore BC, che appartiene ad uno dei due poli della terra. Per fare intanto questo calcolo, conviene prima sapere, che un grado dell' equatore terrestre secondo la misura fattane da Piccardo contiene 342360 piedi. Onde, siccome la sua circonferenza intera dee contenerne 123249600, così ne conterrà 39215782 il suo diametro, e 19607891 il suo raggio, che corrisponde al semiasse maggiore AC.

308. Conviene sapere altresì, che il tempo, in cui dovrebbe farsi da questa nostra terra l'intera sua diurna rivoluzione, sia quasi di ore 23, e minuti 56, o pure di 86160 seconde. Quindi l'arco dell' equa-

Equatore terrestre, ...
nel tempo di una se...
metà in circa di più...
si deve il punto A, sa...
colla caduta per l'...
sima parte di più, co...
ed un sesto, oppure co...
plicata di questa rag...
acquistansi cadendo...
come il quadrato di l...
di 16 piedi con una...
altezza, si avrà con...

AG nella ...
re BG nell...
asse magg...
te tutto ciò, ...
alla figura, ...
nell'ipotesi...
te con quel...
perchè, con...
della altera...
nando queste...
ragione dei...
sa da quell...

Dell'altera...
diurna r...
310. ...

ione di 1 a 578, così starà all'altro mino=

agione di 1 a 577. e pertanto il semi=

e AC, come 577 a 578. Del rimanen

e da noi è stato dimostrato intorno

e dovrebbe avere questa nostra terra

di cui si tratta, si accorda perfettamen=

nto nè dimostrò ancora l'Ugenio. Ma

assi Sferoidale la figura della Terra,

eziandio la gravità; perciò essendo

sua alterazione, ritroveremo, che la

semiassi BC, AC debba essere diver=

di 577 a 578.

S. ~~XXXIII.~~ IX

zione, che soffrir dee la gravità colla

voluzione della Terra.

rivoluzione della Terra, non

[illegible]

in modo, che da per
ed in ogni luogo dell
lo stesso vigore. Ma
zione la sua figur
primieramente, che
punti diversi, quant
superficie; ed indi;
minore nè luoghi,
negli altri più lont
di nuovo **BAD** la
figura sferoidale de
te nell'archetto in

eguali; co
Mm, grav
ne della **I**
dicolare in
prolungata
IL nel pun
due **MH**, **M**
essendo **IV**
rà la rife
alla **IV**. E p
diriggesi ve
d'essa con cu
zione della **I**
ad **MS**.
31. Essen
farsi l'roide

la materia, che ritrovasi nell'archetto
erà colla loro differenza, e colla direzio
S parallela a ciascuna di esse, e perpen
nseguenza alla tangente MT. Mà,
la MK persino a che s'incontri colla
V, si fanno eguali trà esso loro, così le
V, come l'altre due HK, VL. Dunque,
differenza delle due HK, IL, gravite
ita materia con forza corrispondente
rtanto la gravità sua totale, che
o il centro C, sarà a quella porzione
gravita effettivamente secondo la direz
S, come MI ad IV, ò pure come CM

così, non è egli da porsi in dubbio, che con
la figura della terra, debba diriggersi
86

sulla retta, che
Sicome adunque
nell'archetto M
MS; così l'altra
terra secondo la
che le due MS,
punto O; sarà Oi
teria dell'intero
nella curva BA
si cambia eziandio
la materia esist
BAD graviterà

primagenie
terra; così c
un'altra
terrestre. Uno
terra, a gira
perpendicolari
prolungate in
della terra, si
figura si farà
interiore, che
QOR intorno
314 ... Or
prendasi un
facilmente la
che deve agire
trà deter

-rasi la superficie sferoidale della
-lla rivoluzione della seconda si avrà
-erficie; verso di cui graviterà la materia
-e, essendo sferoidale la figura della
Tuttavia la gravità secondo le rette
-i alla sua superficie; ma queste rette
-l vece d'incontrarsi nel Centro stesso
-iccome avviene essendo sferica la sua
-nno tangenti di quell'altra superficie
-o generasi colla rivoluzione della Curva
-all'asse BD.
-e nella superficie sferoidale della Terra
-punto M ad arbitrio potrà determinarsi
-posizione della perpendicolare MS, sapen-
-la gravità in quel punto M ad arbitrio, po-
-rsi facilmente la posizione della perpen-
-[illegible] deve agire la gravità in quel-

Mi, per essere
equiangoli, M
ancora CS, e
AF. Onde, se dal
CS, che sia a
congiungansi ins
MS; si avrà co
manda, colla q
nata altresì la
curva BAD ne
tare sulla MS
315. Può deter
gente MT indep
MS. ...

asse nel punto
goli CPR, SP
quadrato di MI
eguaglianza
altresì come PI
ferenza trà la
se dal semiass
PT, che sia P
si la MT, si
316. Per quo
gravità in ogn
della terra, di
che la gravit
con cui effett
punto M, co
la riferita di
stessa matem
va da ci

R; si fanno eguali frà loro i due rettan=
T, per essere ciascuno di essi eguale al
P. Dunque dovendo essere per la loro
i, come CP a PS, così PT a PR, sarà
T a PR, così la metà di AF alla dif=
stessa metà, e CM, ed in conseguenza
e CA prolungato taglisi la porzione
R nella riferita ragione, e congiunga=
uni con essa la tangente ricercata.
nto poi alla diminuzione, che soffre la
i punto M della superficie sferoidale
già si è veduto, doversi ella fare in modo,
tà totale stia a quella sua porzione,
amente gravita la materia nel
me CM a MS.. Ma, siccome deriva
iminuzione dallo sforzo centrifugo della
così la legge di essa può dedursi anco=
punto M lo sforzo centrifugo stia

dovrà disegnarsi
vendo la gravità
laterali CS, M
te alla CS si d
agisce con direz
graviterà la m
così si diminuir
di CM ad MS.
317. Attento
gravità essendo
facile ad intende
minore nè luog
re nè luoghi più

in essi veruno,
punto A allinea
massima dire
massimo sforz
in quel luogo in
con direzioni in
318. Ma esi
si, che supposta
ragione dei di
da quella ritr
fù determina
conquistasi la
principio, che
per l'altezza d
più. Intanto
determinazion
si rappresente

lo sforzo centrifugo, così al contrario nel-
le all'Equatore dovrà ella soffrire la
inazione; sì perche ivi esercita sì in tu-
tto centrifugo, come ancora perche
la gravità, ed il riferito sforzo agiscono
teramente opposte trà esso loro.
sando così, egli è facile ancora ad intender
la diurna rivoluzione della terra, la
diminuzi BC, AC debba esser diversa
ovata di sopra di 577 a 578. Infatti
to da noi l'altezza AE, per cui caden
velocità del punto, con far uso del solito
nel tempo di una seconda cade un corpo
15 piedi con una dodicesima parte di
in tal principio non deve aver luogo nella
della AE; sì perche la caduta de corpi
nente colla loro gravità diminuita giun
... finisse per mezzo di un

luogo della terra
di una seconda p
dodicesima parte
312. Perciò convie
si è stabilito il riferim
cui cade un Corpo
perchè nel nostro C
latitudine è di 41
lo dà lunghezza di
linee, affinchè pas
zione nel tempo di
ma altrove da no
sue Oscillazioni p

nel tempo di
per un'altez
di 15 piedi con u
320. Ori
dubitare, che
Corpi dalla
effettivamente
Equatore, e n
perocchè, per
nel pendolo
come, con po
zioni sempr
con portarlo
zioni sempre
siansi dati à
stessa del pe
luoghi più ca
niente

…una seconda debba cadere un corpo,
…zio di 2173 linee, che pressoché poco è
…una dodicesima parte di più.
…Pendolo stesso non lascia più luogo di…
…la gravità, per mezzo di cui cadono i
…superficie di questa nostra terra, sia
…minore nè luoghi più vicini alli
…maggiore negli altri più lontani. Im…
…r mezzo di varie osservazioni fatte
…con esattezza, si è conosciuto, che sic…
…rtarlo verso l'Equatore, le sue oscilla…
…più si ritardano, così al contrario,
…verso i poli, le medesime suo oscilla…
…più si accelerano. Ed abbenchè taluni
…credere, che ciò derivi dalla lunghezza
…ndolo, la quale deve aumentarsi nè
…di, e diminuirsi nè luoghi più freddi;
…iderato da altri, che non corris…

egli può rica
del lato, e del
le variazion
alterazione,
figura sferoi
321. Quind
semiassi B C
vrebbe esserci
il pendolo nell
cuna delle se
seconda. Imper
mo altresì, qu

questa seconda,
alla metà del
determinarsi G
tivamente all' a
con aversi la i m
BC, AC si veri N
vera loro rag
322. In upo
minarsi la A
Equatore ter
A nel tempo
una metà di
se dividasi il
stesso Equatore,
verso, che con
piede, quante
Ma

la ragione deve essere l'altezza AE
semiasse maggiore AG, così si
a per mezzo di essa la AE relat
a gravità totale, ed in conseguen=
vera differenza trà i due semiassi
rebbe in cognizione altresì della
sione.
n'altra maniera ancora può deter
E, ed ecco come. Di già l'arco dell
estre, che deve percorrersi dal punto
di una seconda, è di 1430 piedi con
eriù. Dunque, attenta la sua picolezza,
suo quadrato per lo diametro della
si averà in quoziente il suo seno
e ne verrà in conseguenza tanto di un
ne addita il rotto decimale 0,005218.
è lo spazio che deve descriver

sarà lo sforz
gravità, come
come 100 à
ne deve esser
semiasse A
5 piedi. Dun
100, così 98
si averà con ess
come sopra

§. X

Del modo
dei due se

323. Quan

sforzi centrifughi o,
si farebbero, se
la curva BA, G
sia una mezza
C. E siccome fa m
sforzo centrifug N
deve essere al p
me CM à CL, occ
esso loro, come la
ACM, che ci
Onde dobbiam
gia presso à
figura sferoid
del punto M
mà coll'altro
324. Per
quadrante A
le due
piccolo

Fig. 18.

ai quali colla stessa legge, con cui
fosse sferica. Suppongasi perciò, che
D, per di cui generasi la sua superficie
circonferenza descritta col centro
acendosi eguali le due AC, CM, Lo
rgo del punto A spettante all'Equatore
lo sforzo centrifugo del punto M, co
; così i medesimi sforzi saranno trà
il raggio al seno secondo dell'angolo
addita la latitudine del punto M.
o far vedere, che questa stessa analo
poco abbia luogo parimente nella
le della terra, in cui la latitudine
risurasi non già coll'angolo ACM,
ASM.
medesimo prasto, descrivasi col centro C i L
OH, con cui vadansi ad incontrare
PM ne' punti O, e Q. Essendo adunque
ei due punti M, ed O, potrà

altra porzione

0,00500,216,402

ASM. Dun
gi, e la rag
quest'angolo
pertanto g
stessa legge,
sferica, qu
325. Con q
la vera rag
come. Fingia
situato P
poichè l'an
latitudine
raggio al s
65825; è
ragione sa
allo sforzo

la porzione d'ogo,
rotto decimale
dine di Parigi la G
sforzo centri
Onde, dovendo
ragione, potra
col numero
altro numero
326. Or esse
MS, CS insieme
risoluzione
angolo ACM
nuti primi, e
la CM debba
altro numero,
latitudine di
cioè dello sfor
eguale alla ra
di già si è vel

un piede segnata da quest'altro
0'003435; e pertanto nella latitu
gravità diminuita sarà allo
fugo come 15'08333 à 0'003435.
essere le due MC, CS in questa stessa,
esprimersi la prima di esse MS
5'08333, e la seconda CS co 'l
0'003435.
ndo nel triangolo CSM noti i due lati
, coll'angolo da essi contenuto, colla sua
troveremo primieramente, che l'
[debba essere di 48 gradi 49 mi
31 minuti secondi; ed indi, che
esprimersi per mezzo di quest'
15'085268; e pertanto nella
Parigi la ragione di CS à CM,
zo centrifugo alla gravità totale, sarà
gione di 0'003435 à 15'085268. Mà
duto, che lo sforzo centrifugo
dal

AB alla tutta
seguenza i du
esso loro, non
5781 à 578
327. Confor
re la gravità to
15'1064 à 0'
gravità totale
15'1064 à 15
nell'Equatore d
nuita nel temp
con quella par
te 0'05512.

lo nell'Equato,
Oscillazione nel
se facciasi, con
7, cioè come AE
linee ad un a
lunghezza del
seguenza sarà
di 3 piedi, e
328. Ma
lo sforzo cent
Equatore, pass
perficie sferoi
Latitudine, dep
totale, e la gra
che M sia il p
latitudine, sa
mezzo di cui

...rte, per potere insieme farecinque... un...

tempo di una seconda. Imperocchè;

... il quadrato di 22 al quadrato di

SA ... 49, così l'altezza di 216 ...

tra altezza; col suo duplo si avrà ...

... perduta ricercata, la quale in com...

presso à poco di 439 linee, o pure

... linee.

... è qui da notarsi, che con esser noto

... rifugo del punto A spettante all'...

... iamo in ogni altro punto della cu...

... idale della terra, di cui sia nota la

... inire la ragione trà la gravità

... vità diminuita. Fingiamo perciò,

... punto dato, ed essendo nota la sua

... rà noto altresì l'angolo ASM, per

... lla si misura. Onde se facciasi,

come

alli angoli A I M

ne di CM, ad M

gravità diminuita

329. Del rimane

intorno alla figura

nella supposizione

per tutta la sua

che ella magnif

distanza dal centr

mezzo di cui gener

terra, sarà un

saranno tra esso

Per dimostrarlo

perciò, colle rispe

si acquistano,

sive gravità

AE ad MG

AC ad qua

in ragion com

stessa MN.

330. Sup

piccolo della c

perpendicola

gli archi ch

colla stessa

diminuirà, ce

brarà l'acqu

centrifuga,

come RT,

Pp sarà in

ad AC, ed

confusi

e della semplice reciproca delle rispet=
totali, con cui si acquistano; sarà
in ragion composta del quadrato di
...rato di MN, e di CM ad AC, o pure
...posta di AC ad MN, e di CM alla
... CA ... MS ...
...ai Mm sia un'archetto infinitamente
...rva BAD, ed abbassate sulla AC le
...ri MP, mp, descrivansi col centro C
...colari MR, mr, che s'incontrino
AC nè punti R, ed r; tuttavia si
...mis sopra che per potersi equili=
... sù di quell'archetto, il loro sforzo
...bba essere alla loro gravità totale,
...P p, ed in conseguenza ancora Rr, è
...agion composta di AH ad MI, di MN
...A ... alla metà di AC. Quindi, se noi
... di figura sferoidale, la gravità
totale

ϑ· Κγὰ Ρ/β,

[illegible]

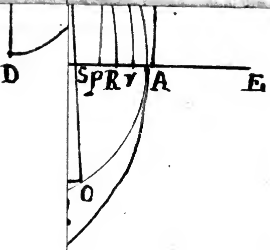
...ot

XX
XX
Capitolo
XX
XX
III
XX
IV
XX
V
XX

XXXIII. Dell'alterazione, ch-
IX. diurna rivoluzione de-
XXXIV. Del modo d'indaga-
assi nella figura Sfero-

XX
XX
Capitolo
I.
XX
II.
XX
E
III
XX
IV.
XX
V.
XX

e soffrir deve la gravità colla
lla terra - - - - - - - - - - - - 146
re, la vera ragione dei due semi=
idale della terra - - - - - -


D
S P R r A
E
O

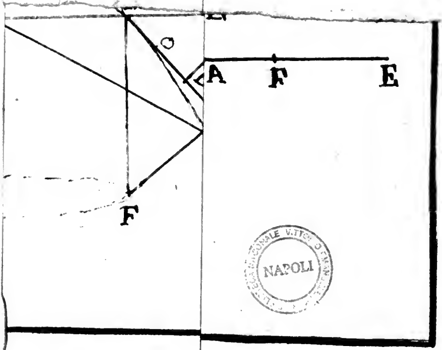

O
A
F
E
F



Fig. 6.

Fig. 8.

